ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

№ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1938

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

Ответственный редактор — академик-секретарь
Отделения математических и естественных наук
акад. А. Е. Ферсман

Редакционная коллегия — Президиум математической группы ОМЕН:
акад. И. М. Виноградов, акад. С. Н. Бернштейн
и проф. Б. И. Сегал

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

И. М. ВИНОГРАДОВ

НОВАЯ ОЦЕНКА ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Статья содержит новые, несравнимо более точные (хотя, повидимому, далеко не самые точные, какие можно получить, идя тем же путем) оценки сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i k f(p)},$$

где k—целое, p пробегает простые числа и $f(p)$ — целый многочлен степени выше первой. Точность оценок зависит не только от N и k, но также от приближений к старшему коэффициенту многочлена посредством рациональных дробей.

В моем кратком сообщении «Новые оценки тригонометрических сумм, содержащих простые числа» [1], были указаны новые более точные оценки сумм вида

$$S=\sum_{p\leqslant N_0} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Подробное доказательство для случая

$$f(p)=\alpha p$$

мною уже опубликовано [2]. Здесь я даю подробное доказательство некоторой общей теоремы, из которой тотчас следуют и остальные теоремы моего краткого сообщения, относящиеся к более общему случаю.

Обозначения. θ вещественное; $|\theta|\leqslant 1$; при вещественном z полагаем

$$\{z\}=z-[z];\quad (z)=\min(\{z\},\quad 1-\{z\});$$

n целое постоянное >1; при $B>0$ обозначения

$$A\ll B;\quad B\gg A;\quad A=O(B)$$

показывают, что отношение

$$\frac{|A|}{B}$$

[1] ДАН, XVII, № 4, 1937.

[2] Матем. сборник, т. 2(44), № 5, 1937.

не превосходит некоторого постоянного; N_0 целое $\gg c_0$, где c_0 — достаточно большое постоянное >1;

$$N = N_0^n; \quad \mu = \log N;$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad Q = \min\left(q, \frac{N}{q}\right); \; Q \geqslant 1;$$

p, p_1, ... простые.

ЛЕММА 1. *Пусть k и l целые;*

$$k > 0, \quad 0 < l < Q; \quad N_1 = \frac{N_0}{l}, \quad S = \sum_{x=1}^{N_1} e^{2\pi i k f(lx)};$$

$f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_n$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *вещественные.*

Тогда при условии

$$\min(N_1, Q) \geqslant \mu^{2^{3n-2}}$$

будем иметь

$$S \ll N_1 \Delta_1^{2^{-n+1}}; \quad \Delta_1 = \frac{k l^n \mu}{\sqrt{\min(N_1, Q)}}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть k и l целые;*

$$k > 0; \quad 0 < l < Q; \quad N_1 = \frac{N_0}{l}; \quad 0 \leqslant N' \leqslant N_1;$$

$f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_n$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *вещественные;*

$$\Omega = \sum_d \sum_m e^{2\pi i k f(ldm)},$$

причем d пробегает целые числа, принадлежащие некоторой последовательности (d), с условием

$$D < d \leqslant D_1; \quad 1 < D < D_1 < N_1$$

и m, при каждом данном d, пробегает целые числа, принадлежащие некоторой последовательности (m), с условием

$$\frac{N'}{d} < m \leqslant \frac{N_1}{d}.$$

Тогда при условии

$$\min\left(\frac{N_1}{D_1}, Q\right) \geqslant \mu^{2^{6n-2}}$$

будем иметь

$$\Omega \ll N_1 \mu \Delta^{2^{-2n}}; \quad \Delta = \frac{1}{D} + \frac{k l^n \mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_1}{D_1}, Q\right)}}.$$

Доказательства. Доказательств лемм 1 и 2 мы не приводим, так как они представляют собою повторение доказательств соответствующих лемм одной из моих предыдущих работ[3].

[3] «Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел», Труды Тбилисского матем. института, т. III, 1937, стр. 1—33.

ТЕОРЕМА. *Пусть k целое* >0;

$$S=\sum_{p\leqslant N_0} e^{2\pi i k f(p)};$$

$f(p)=\alpha p^n+\ldots+\alpha_n$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *вещественные*;

$$Q\geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}}.$$

Тогда имеем

$$S\ll N_0\left(kU^{-\frac{1}{4n+4}}\right)^{2^{-2n}};\quad U=\min\left(N_0^{\frac{1}{3}},\ Q\right).$$

Доказательство. 1° Легко находим

$$S=\sum_{d\leqslant N_0}\mu(d)S_d+O(\sqrt{N_0});\qquad S_d=\sum_{m=1}^{\frac{N_0}{d}} e^{2\pi i k f(dm)}, \tag{1}$$

где d пробегает числа последовательности (d), состоящей из делителей произведения всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N_0}$.

2° Сначала мы оценим лишь сумму

$$S_0=\sum_{d\leqslant d_0}\mu(d)S_d;\quad 1<d_0<Q$$

(значение числа d_0 точно будет указано дальше). Применяя к каждой сумме S_d лемму 1, находим

$$S_d\ll\frac{N_0}{d}\Delta_1^{2^{-n+1}};\quad \Delta_1=\frac{kd^n\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d},\ Q\right)}}.$$

Поэтому

$$S_0\ll N_0\left(\frac{kd_0^n\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d_0},\ Q\right)}}\right)^{2^{-n+1}}, \tag{2}$$

при условиях

$$1<d_0<Q;\quad \min\left(\frac{N_0}{d_0},\ Q\right)\geqslant \mu^{2^{3n-2}}.$$

3° Теперь мы оценим сумму

$$S_1=\sum_{d_0<d\leqslant N_0}\mu(d)S_d.$$

Эта сумма имеет вид:

$$S_1=T_0-T_1;\quad T_0=\sum_{(d_0)}S_d;\quad T_1=\sum_{(d_1)}S_d, \tag{3}$$

где (d_0) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с четным числом простых сомножителей, и (d_1) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с нечетным числом простых сомножителей. При этом d, в суммах T_0 и T_1, пробегает лишь числа с условием

$$d_0<d\leqslant N_0.$$

Достаточно оценить только T_0, так как T_1 оценивается точно таким же способом.

4° Сначала мы оценим лишь часть T_0' суммы T_0 с условием

$$d_0 < d \leqslant d_1; \quad N_0^{\frac{3}{4}} \leqslant d_1 \leqslant N_0$$

(значение числа d_1 точно будет указано дальше). Имеем

$$T_0' = \sum_d \sum_m e^{2\pi i k f(dm)},$$

где d пробегает числа последовательности (d_0) с условием

$$d_0 < d \leqslant d_1$$

и m, при каждом данном d, пробегает целые числа с условием

$$0 < m \leqslant \frac{N_0}{d}.$$

К сумме T_0' можно применить лемму 2. Получим

$$T_0' \ll N_0 \mu \Delta^{2^{-2n}}; \quad \Delta = \frac{1}{d_0} + \frac{k\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d_1},\ Q\right)}}, \tag{4}$$

при условиях

$$N_0^{\frac{3}{4}} \leqslant d_1 \leqslant N_0; \quad \min\left(\frac{N_0}{d_1},\ Q\right) \geqslant \mu^{2^{6n-2}}.$$

5° Теперь остается оценить оставшуюся часть T_0'' суммы T_0. Имеем

$$T_0'' = \sum_d \sum_m e^{2\pi i k f(dm)},$$

где d пробегает числа последовательности (d_0) с условием

$$d_1 < d \leqslant N_0$$

и m, при каждом данном d, пробегает целые числа с условием

$$0 < m \leqslant \frac{N_0}{d}.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$T_0'' = \sum_m T(m); \qquad T(m) = \sum e^{2\pi i k f(md)}, \tag{5}$$

где m пробегает значения

$$m = 1, \ldots, \left[\frac{N_0}{d_1}\right]$$

и d, при каждом данном m, пробегает числа последовательности (d_0) с условием

$$d_1 < d \leqslant N_1; \quad N_1 = \frac{N_0}{m}.$$

6° Теперь рассмотрим какое-либо одно значение $T(m)$. Каждое d будет произведением различных простых чисел p с условием:

$$2 < p \leqslant \sqrt{N_0}.$$

В виду $d_1 \geqslant N_0^{\frac{3}{4}}$, этих чисел будет не менее 2.

Разобьем все простые числа $\leqslant \sqrt{N_0}$ на группы следующим образом. Пусть

$$r = 1 + \rho,$$

где ρ — произвольно малое положительное постоянное. Пусть, далее, τ есть наибольшее целое с условием

$$2^{r^{\tau-1}} \leqslant \sqrt{N_0}.$$

Тогда получим τ групп чисел p, если включим в s-ую группу ($s = 1, \dots, \tau$) числа p с условием

$$2^{r^{s-1}} \leqslant p < 2^{r^s}.$$

Из определения τ следует (при условии, что ρ достаточно мало)

$$r^{\tau-1} < \frac{\mu}{2n \log 2}; \quad r^\tau < \frac{\mu}{2};$$

$$\tau < \frac{\log \mu}{2 \log r} = \eta \log \mu.$$

Пусть σ обозначает число простых делителей какого-либо числа d. Тогда

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (\sigma + 1) < N_0; \quad \log 2 + \dots + \log(\sigma + 1) < \mu;$$

$$\int_0^\sigma \log x \, dx < \mu; \quad \sigma(\log \sigma - 1) < \mu.$$

Поэтому очевидно

$$\sigma < \mu.$$

Все произведения d мы разобьем на классы, относя к одному и тому же классу произведения с равными числами простых сомножителей, принадлежащих одинаковым группам. Число D всех классов будет

$$D < (\max \sigma)^\tau < \mu^{\eta \log \mu} = e^{\eta (\log \mu)^2}. \tag{6}$$

7° Мы оценим сначала часть Ω суммы $T(m)$, отвечающую какому-либо определенному классу значений d. Всякое d выбранного класса можно представить в форме

$$d = f_1 \cdots f_\tau,$$

где f_s обозначает произведение простых делителей d, принадлежащих s-ой группе ($f_s = 1$, если таких делителей нет). Пусть l_s обозначает число простых сомножителей произведения f_s. Тогда, полагая

$$f_{s1} = 2^{r^{s-1} l_s}; \quad f_{s2} = 2^{r^s l_s},$$

очевидно будем иметь

$$f_{s1} \leqslant f_s \leqslant f_{s2}.$$

Те же самые числа

$$f_{11}, \dots, f_{\tau 1},$$
$$f_1, \dots, f_\tau,$$
$$f_{12}, \dots, f_{\tau 2},$$

но переписанные (одновременно) в таком порядке, чтобы $f_{11}, \ldots, f_{\tau 1}$ шли не убывая, мы обозначим символами

$$g_{11}, \ldots, g_{\tau 1},$$
$$g_1, \ldots, g_\tau,$$
$$g_{12}, \ldots, g_{\tau 2}.$$

Соответственно этому мы изменим и номера групп. Тогда будем иметь

$$d = g_1 \cdots g_\tau; \quad g_{s1} \leqslant g_s \leqslant g_{s2}; \quad g_{s2} = g_{s1}^r;$$
$$g_{11} \leqslant g_{21} \leqslant \ldots \leqslant g_{\tau 1}.$$

Пусть теперь η обозначает последнее число ряда $1, \ldots, \tau$ с условием (при $\eta = 1$ в этом условии левая часть равна 1)

$$g_{12} \cdots g_{\eta-1,2} \leqslant d_1^{\frac{1}{3}}.$$

8° Сначала рассмотрим случай

$$\eta < \tau.$$

Положим

$$u = g_1 \cdots g_\eta; \quad v = g_{\eta+1} \cdots g_\tau;$$
$$u_1 = g_{11} \cdots g_{\eta 1}; \quad v_1 = g_{\eta+1,1} \cdots g_{\tau 1};$$
$$u_2 = g_{12} \cdots g_{\eta 2}; \quad v_2 = g_{\eta+1,2} \cdots g_{\tau 2}.$$

Находим

$$(u_1 v_1)^r = u_2 v_2; \quad d_1 < uv \leqslant N_1;$$
$$g_{\eta 2} \leqslant v_2; \quad d_1^{\frac{1}{3}} < u_2 \leqslant d_1^{\frac{1}{3}} v_2; \quad u_2 v_2 \leqslant d_1^{\frac{1}{3}} v_2^2;$$
$$d_1 < d_1^{\frac{1}{3}} v_2^2; \quad d_1^{\frac{1}{3}} < v_2 = v_1^r \leqslant v^r; \quad v > d_1^{\frac{1}{3r}};$$
$$u \leqslant \frac{N_1}{v} < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}.$$

Таким образом, имеем

$$d = uv; \quad d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}$$

и следовательно

$$\Omega = \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где u пробегает числа указанного выше вида с условием

$$d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}; \quad N_1 = \frac{N_0}{m}$$

и v, при каждом данном u, пробегает лишь значения с условием

$$\frac{d_1}{u} < v \leqslant \frac{N_1}{u}.$$

Применяя лемму 2, получим

$$\Omega \ll \frac{N_0}{m}\mu\Delta^{2^{-2n}}; \quad \Delta = \frac{km^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}}, Q\right)}} \tag{7}$$

при условии, что

$$Q \geqslant \mu^{2^{6n-2}}.$$

9° Теперь рассмотрим случай $\eta = \tau$. Число всех делителей числа g_τ ради краткости обозначим через $\varkappa$. Полагая

$$\varkappa_1 = \left[\frac{\varkappa}{2}\right],$$

в виду

$$g_{12} \cdots g_{\tau-1,2} \leqslant d_1^{\frac{1}{3}}; \quad g_\tau > d_1^{\frac{2}{3}} \geqslant N^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{N},$$

будем иметь

$$\varkappa \geqslant 2; \quad \varkappa_1 \geqslant 1.$$

Каждое d мы можем теперь разбить на два сомножителя

$$d = uv,$$

предполагая, что u содержит $\varkappa_1$ сомножителей τ-ой группы и все сомножители, принадлежащие другим группам, а v содержит $\varkappa - \varkappa_1$ оставшихся сомножителей τ-ой группы. Таким путем мы можем разбить число d на сомножители

$$C_\varkappa^{\varkappa_1} = \frac{\varkappa(\varkappa-1)\cdots(\varkappa-\varkappa_1+1)}{1\cdot 2\cdots \varkappa_1} > 1$$

различными способами.

Из сказанного следует, что

$$\Omega = \frac{1}{C_\varkappa^{\varkappa_1}}\Omega'; \quad \Omega' = \sum_u\sum_v e^{2\pi i k f(muv)}, \tag{8}$$

причем u и v пробегают все пары значений указанного выше вида с условием

$$d_1 < uv \leqslant N_1; \quad (u, v) = 1; \quad N_1 = \frac{N_0}{m}.$$

Выясним теперь границы, в которых может изменяться u. Пусть,

$$g_\tau = p_1 \cdots p_\varkappa; \quad u = \frac{d}{g_\tau} p_1 \cdots p_{\varkappa_1}; \quad v = p_{\varkappa+1} \cdots p_\varkappa.$$

Имеем

$$u \geqslant p_1 \cdots p_{\varkappa_1} > v^{\frac{\varkappa_1}{r(\varkappa-\varkappa_1)}} \geqslant v^{\frac{1}{2r}}; \quad v < u^{2r};$$

$$uv > d_1; \quad u^{3r} > d_1; \quad u > d_1^{\frac{1}{3r}};$$

$$v > g_\tau^{\frac{x-x_1}{rx}} \geqslant g_\tau^{\frac{1}{2r}} > d_1^{\frac{1}{3r}}; \quad uv \leqslant N_1; \quad u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}.$$

Таким образом

$$d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d^{-\frac{1}{3r}}.$$

10° Теперь уже приступим к оценке суммы Ω'. Имеем

$$\Omega' = \sum \mu(\delta)\,\Omega'_\delta; \quad \Omega'_\delta = \sum_{u'}\sum_{v'} e^{2\pi i k f(m\delta^2 u' v')},$$

где δ пробегает все делители чисел g_τ, а u' и v', при каждом данном δ, пробегают частные от деления на δ чисел u и v, одновременно кратных δ.

Оценим сумму Ω'_δ. Имеем

$$\Omega'_\delta = \sum_{u'}\sum_{v'} e^{2\pi i k f(m\delta^2 u' v')},$$

где u' пробегает значения с условием

$$\frac{d_1^{\frac{1}{3r}}}{\delta} < u' < \frac{N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\delta}; \quad N_1 = \frac{N_0}{m},$$

а v', при данном u', пробегает значения с условием

$$\frac{d_1}{\delta^2 u'} < v \leqslant \frac{N_1}{\delta^2 u'}.$$

Пусть

$$\delta < d_1^{\frac{1}{3r}} \mu^{-2^{6n-2}}.$$

Тогда имеем

$$1 < \frac{d_1^{\frac{1}{3r}}}{\delta} < \frac{N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\delta} < N_1.$$

Применяя лемму 2, где берем $\frac{N_1}{\delta^2}$ вместо N_1 и $km^n\delta^{2n}$ вместо kl^n, получим

$$\Omega'_\delta \ll \frac{N_0\mu}{m\delta^2}\Delta^{2^{-2n}}; \quad \Delta = \delta d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{km^n\delta^{2n}\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{d_1^{\frac{1}{3r}}}{\delta},\, Q\right)}},$$

если только $Q \geqslant \mu^{2^{6n-2}}$.

При

$$\delta \geqslant d_1^{\frac{1}{3r}} \mu^{-2^{6n-2}}$$

мы можем применить ту же самую оценку, так как тогда

$$\Omega_\delta \leqslant \sum_{u'} \frac{N_1}{\delta^2 u'} \ll \frac{N_0\mu}{m\delta^2}; \quad \Delta \gg 1.$$

Поэтому, в виду

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}-2\leqslant\frac{5}{16}-2<-\frac{5}{3},$$

находим

$$\Omega'\ll\sum_{\delta}\frac{N_0\mu}{m\delta^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{km^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}\ll\frac{N_0\mu}{m}\left(\frac{km^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}.$$

Вместе с тем из (8) выводим

$$\Omega\ll\frac{N_0\mu}{m}\left(\frac{km^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}, \tag{9}$$

конечно, при условии

$$Q\geqslant\mu^{2^{6n-2}}.$$

11° В виду (6), (7) и (9) имеем

$$T(m)\ll e^{\gamma_1(\log\mu)^2}\frac{N_0\mu}{m}\left(\frac{km^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}.$$

А тогда из (5) находим

$$T_0''\ll N_0e^{\gamma_1(\log\mu)^2}\mu\left(\frac{k\left(\frac{N_0}{d_1}\right)^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}} \tag{10}$$

при условии, что

$$Q\geqslant\mu^{2^{6n-2}}.$$

Далее, из (1), (2), (3) (оценка T_1 дает тот же результат, что и оценка T_0), (4) и (10) выводим

$$S\ll N_0\left(\frac{kd_0^n\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d_0},\ Q\right)}}\right)^{2^{-n+1}}+N_0\mu\left(\frac{1}{d_0}+\frac{k\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d_1},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}+$$

$$+N_0e^{\gamma_1(\log\mu)^2}\mu\left(\frac{k\left(\frac{N_0}{d_1}\right)^n\mu}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}},\ Q\right)}}\right)^{2^{-2n}}. \tag{11}$$

При этом должны быть выполнены условия

$$\frac{N_0}{d_0} \geqslant \mu^{2^{3n-2}}; \quad 1 < d_0 < Q; \quad \frac{N_0}{d_1} \geqslant \mu^{2^{6n-2}}; \quad Q \geqslant \mu^{2^{6n-2}}; \quad N_0^{\frac{3}{4}} \leqslant d_1 \leqslant N_0.$$

12° Положим

$$d_0 = \left(\frac{\min(N_0, Q)}{k^2\mu^2}\right)^{\frac{1}{2n+1+2^{-n}}};$$

$$\frac{N_0}{d_1} = \left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4n+3}\right)}, Q\right)\right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad \text{что} \leqslant N_0^{\frac{2}{3(4n+3)}}.$$

Тогда при

$$Q \geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}}$$

все условия, указанные в конце 11°, будут выполнены и мы будем иметь

$$\left(\frac{kd_0^n\mu}{\sqrt{\min\left(\frac{N_0}{d_0}, Q\right)}}\right)^{2^{-n+1}} = \left(\frac{1}{d_0}\right)^{2^{-2n}} < \left(\frac{k^2\mu^2}{\min(N_0, Q)}\right)^{\frac{2^{-2n}}{2n+2}};$$

$$\frac{\left(\frac{N_0}{d_1}\right)^n}{\sqrt{\min\left(d_1^{\frac{1}{3r}}, Q\right)}} < \left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4n+3}\right)}, Q\right)\right]^{\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}}, Q\right)\right]^{\frac{1}{4n+3}}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{N_0}{d_1}}} \leqslant \frac{1}{\left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}}, Q\right)\right]^{\frac{1}{4n+3}}}.$$

Поэтому из (11) выводим

$$S \ll N_0\mu e^{\eta(\log\mu)^2}\left(\frac{k\mu}{\left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}}, Q\right)\right]^{\frac{1}{4n+3}}}\right)^{2^{-2n}},$$

если только

$$Q \geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}}.$$

Пусть теперь

$$Q \geqslant e^{\mu^{\frac{1}{3}}}.$$

Тогда очевидно

$$S \ll N_0\left(\frac{k}{\left[\min\left(N_0^{\frac{1}{3}}, Q\right)\right]^{\frac{1}{4n+4}}}\right)^{2^{-2n}}.$$

13° Если же $Q < e^{\mu^{\frac{1}{3}}}$, то можно применить мой прежний вывод [4]. Получим

$$S \ll N_0 \left(\frac{k d_0^n \mu}{\sqrt{Q}}\right)^{2^{-n+1}} + N_0 \mu \left(\frac{1}{d_0} + \frac{k\mu}{\sqrt{\frac{N_0}{d_1}}}\right)^{2^{-2n}} +$$

$$+ N_0 \mu^2 \left(\frac{k\left(\frac{N_0}{d_1}\right)^n \mu}{\sqrt{Q}}\right)^{2^{-2n}}$$

при условиях

$$1 < d_0 < Q; \quad \mu^{2^{6n-2}} \leqslant \frac{N_0}{d_1} \leqslant Q.$$

Положим

$$d_0 = \left(\frac{Q}{k^2\mu^2}\right)^{\frac{1}{2n+2^{-n}}}; \quad \frac{N_0}{d_1} = Q^{\frac{1}{2n+1}}; \quad Q \geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}}.$$

Тогда указанные выше условия будут выполнены, причем находим

$$\left(\frac{k d_0^n \mu}{\sqrt{Q}}\right)^{2^{-n+1}} = \left(\frac{1}{d_0}\right)^{2^{-2n}} < \left(\frac{k^2\mu^2}{Q}\right)^{\frac{2^{-2n}}{2n+1}};$$

$$\frac{\left(\frac{N_0}{d_1}\right)^n}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N_0}{d_1}}} = \frac{1}{Q^{\frac{1}{4n+2}}}$$

и мы получим

$$S \ll N_0 \mu^2 \left(\frac{k\mu}{Q^{\frac{1}{4n+2}}}\right)^{2^{-2n}} \ll N_0 \left(\frac{k}{Q^{\frac{1}{4n+4}}}\right)^{2^{-2n}},$$

если только выполнено условие

$$Q \geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}}.$$

Таким образом теорема доказана полностью.

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 27. X. 1937.

[4] См. сноску [3].

I. VINOGRADOW. A NEW ESTIMATION OF A TRIGONOMETRICAL SUM CONTAINING PRIMES

SUMMARY

In the present paper I give a complete proof of a general theorem which in an other formulation was breafly demonstrated earlier *.

THEOREM. *Let n be an integral constant* >1; *k is an integer* >0; *N_0 is an integer* >1; $N=N_0^n$; $\mu=\log N$; $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ *are real*; $f(x)=\alpha x^n+\dots+\alpha_n$;

$$S=\sum_{p\leqslant N_0} e^{2\pi i k f(p)},$$

where p runs over primes;

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2};\quad (a, q)=1;\quad |\theta|\leqslant 1;\quad Q=\min\left(q, \frac{N}{q}\right);$$

$$Q\geqslant \mu^{(2n+1)2^{6n-2}};\quad U=\min\left(N_0^{\frac{1}{3}}, Q\right).$$

Then we have

$$|S|\leqslant cN_0\left(kU^{-\frac{1}{4n+4}}\right)^{2^{-2n}},$$

where c depends only on n.

* See note [1] on page 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

И. М. ВИНОГРАДОВ

УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНКИ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Статья содержит наиболее точные оценки сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i \alpha k p},$$

где α — вещественное, k — целое и p пробегает простые числа. Дальнейшее сколько-либо значительное улучшение этих оценок применением того же метода затруднительно.

В моем кратком сообщении [1] были указаны новые оценки сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i k f(p)},$$

где p пробегает простые числа. Эти оценки гораздо более точны, чем мои первоначальные оценки. Однако при внимательном рассмотрении доказательств я убедился, что мой общий метод здесь далеко не исчерпан до конца. В настоящей статье я даю новое улучшение оценок в применении к случаю

$$f(p) = \alpha p.$$

Подобное улучшение достигается также, если $f(p)$ целый многочлен степени выше первой. При этом p может пробегать простые числа арифметической прогрессии.

Обозначения. θ вещественное; $|\theta| \leqslant 1$;

$$\{z\} = z - [z]; \quad (z) = \min(\{z\},\ 1 - \{z\});$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ произвольно малые положительные постоянные.

При положительном B обозначения

$$A \ll B; \quad B \gg A; \quad A = O(B)$$

показывают, что отношение

$$\frac{|A|}{B}$$

не превосходит некоторого постоянного.

---

[1] ДАН, XVII, № 4, 1937; Матем. сборник, т. 2(44), № 5, 1937.

$N \geqslant c$, где c — достаточно большое постоянное >1; $\mu = \log N$.

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q < N;$$

p пробегает простые числа.

ЛЕММА 1. *Пусть* k *целое* >0; $U \geqslant 1$;

$$k = k_1\delta; \quad q = q_1\delta; \quad \delta = (k, q);$$

$$\Omega = \sum_{h=f+1}^{f+q'} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha kh)}\right); \quad 0 < q' \leqslant q_1.$$

Тогда имеем [2]

$$\Omega \ll kU + q_1\mu.$$

ЛЕММА 2. *Пусть* k *целое* >0; $1 < d_1 < N$. *Тогда имеем*

$$\sum_{d=1}^{d_1} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{2(\alpha kd)}\right) \ll \left(d_1 + q + \frac{k^2N}{q}\right)\mu.$$

Доказательство. Сначала оценим часть S_0 нашей суммы, распространенную на значения

$$d \leqslant \frac{q}{2k}.$$

Имеем

$$S_0 \leqslant \sum_{d \leqslant \frac{q}{2k}} \frac{1}{2(\alpha kd)};$$

$$\alpha kd = \frac{ak_1d}{q_1} + \frac{\theta k_1 d}{q_1 q} = \frac{ak_1d}{q_1} + \frac{\theta'}{2q}; \quad 0 < d < q_1;$$

$$(\alpha kd) \geqslant \frac{|s| - \frac{1}{2}}{q_1} \gg \frac{|s|}{q},$$

где s — абсолютно наименьший вычет ak_1d по модулю q_1. Поэтому

$$S_0 \ll \sum_s \frac{q_1}{|s|} \ll q_1\mu.$$

Далее оценим часть S_1 нашей суммы, распространенную на значения d с условием

$$\frac{q}{2k} < d \leqslant d_1$$

(если, конечно, такие d существуют). Эту часть мы разобьем на

$$\ll \frac{d_1}{q_1} + 1$$

сумм вида

$$\Omega = \sum_{d=f+1}^{f+q'} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{2(\alpha kd)}\right); \quad 0 < q' \leqslant q_1.$$

[2] Матем. сборник, т. 2(44), № 2, 1937, стр. 179—195, лемма 1.

За числа f могут быть, например, взяты числа ряда

$$f=\left[\frac{q}{2k}\right],\ \left[\frac{q}{2k}\right]+q_1,\ \left[\frac{q}{2k}\right]+2q_1, \dots,$$

удовлетворяющие условию

$$f < d_1.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\Omega \ll \sum_{d=f+1}^{f+q'} \min\left(\frac{N}{f}, \frac{1}{2(\alpha k d)}\right) \ll k\frac{N}{f}+q_1\mu.$$

Следовательно,

$$S_1 \ll \frac{2k}{q}kN + k\sum_{s=1}^{d_1}\frac{N}{sq_1}+\left(\frac{d_1}{q_1}+1\right)q_1\mu \ll \left(\frac{k^2N}{q}+d_1+q_1\right)\mu.$$

Найденные для S_0 и S_1 оценки и доказывают лемму 2.

ЛЕММА 3. *Пусть заданы две последовательности* (u) *и* (z) *целых положительных чисел;*

$$1 < U_0 < U_1 < N;\quad 0 < q < N;\quad k \text{ целое } > 0;$$

$$T=\sum_u\sum_z \varphi(z)e^{2\pi i\alpha k u z},$$

где u *пробегает числа последовательности* (u) *с условием*

$$U_0 < u \leqslant U_1$$

и z, *при данном* u, *пробегает числа последовательности* (z) *с условием*

$$0 < z \leqslant \frac{N}{u}.$$

При этом функция $\varphi(z)$ *удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant \varphi(z) \ll N^{\varepsilon'}.$$

Тогда имеем [3]

$$T \ll N^{1+\varepsilon''}\sqrt{\frac{1}{U_0}+\frac{U_1}{N}+\frac{q}{N}+\frac{k}{q}}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* k *целое* >0;

$$S=\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha k p}.$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon}\sqrt{N^{-\frac{1}{3}}+\frac{q}{N}+\frac{k}{q}+\frac{k^4}{q^2}}.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$S=\sum_{d\leqslant N}\mu(d)S_d+O(\sqrt{N});\quad S_d=\sum_{m=1}^{\frac{N}{d}} e^{2\pi i\alpha k d m},$$

[3] Матемaт. сборник, т. 2(44), № 2, 1937, стр. 179—195, лемма 4.

где d пробегает числа последовательности (d), состоящей из делителей произведения всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$. Далее находим

$$\sum_{d\leqslant N}\mu(d)S_d = T_0 - T_1; \quad T_0 = \sum_{(d_0)} S_d; \quad T_1 = \sum_{(d_1)} S_d,$$

где (d_0) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с четным числом простых делителей, и (d_1) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с нечетным числом простых делителей. При этом d, в суммах T_0 и T_1, пробегает лишь значения, не превосходящие N.

2° Дальнейшие рассуждения будут относиться к какой-либо одной из сумм T_0 и T_1. Эту избранную сумму мы обозначим символом T_2; соответствующую из последовательностей (d_0) и (d_1) обозначим символом (d_2).

3° Все простые числа $\leqslant\sqrt{N}$ мы разобьем на группы следующим образом. Пусть ρ произвольно малое положительное постоянное;

$$r = 1+\rho; \quad \lambda = \frac{1}{3\rho}.$$

Пусть, далее, τ обозначает наибольшее целое число с условием

$$2^{r^{\tau-1}} \leqslant \sqrt{N}.$$

Тогда мы получим τ групп чисел p, если включим в s-ую группу $(s=1, \ldots, \tau)$ числа p с условием

$$2^{r^{s-1}} \leqslant p < 2^{r^s}.$$

Из определения τ (ρ достаточно мало) находим

$$\tau < \frac{\log\mu}{\log r}.$$

4° Пусть σ обозначает число простых делителей какого-либо числа $d\leqslant N$. Легко выводим

$$\sigma < \mu.$$

5° Все произведения d мы разобьем на классы, относя к одному и тому же классу произведения с равными числами простых сомножителей, принадлежащих одним и тем же группам. В виду 3° и 4° число D всех таких классов будет

$$D < \mu^{\frac{\log\mu}{\log r}} \ll N^{\varepsilon_1}.$$

6° Мы оценим теперь часть Ω суммы T_2, отвечающую какому-либо определенному классу значений d. Всякое d представляется в форме

$$d = f_1 \ldots f_\tau,$$

где f_s обозначает произведение простых делителей числа d, принадлежащих s-ой группе ($f_s = 1$, если таких делителей нет). Полагая

$$\varphi_s = 2^{r^{s-1} l_s}; \quad F_s = 2^{r^s l_s},$$

где l_s обозначает число простых делителей числа f_s, имеем

$$\varphi_s \leqslant f_s < F_s.$$

Те же самые числа

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau,$$
$$f_1, \ldots, f_\tau,$$
$$F_1, \ldots, F_\tau,$$

но переставленные (одновременно) в таком порядке, чтобы F_s шли не возрастая, мы обозначим символами

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau,$$
$$g_1, \ldots, g_\tau,$$
$$G_1, \ldots, G_\tau.$$

Соответственно этому мы изменим и номера групп чисел p. Тогда будем иметь:

$$d = g_1 \ldots g_\tau; \quad \gamma_s \leqslant g_s < G_s;$$
$$G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_\tau.$$

7° Допустим сначала, что

$$G_1 \ldots G_\tau > N^{\frac{1}{3}}.$$

Пусть ν обозначает первое число ряда $1, \ldots, \tau$ с условием (при $\nu = 1$ в этом условии левая часть равна 1)

$$G_1 \ldots G_\nu > N^{\frac{1}{3}}.$$

8° Предположим, что

$$\nu > 1.$$

Тогда, полагая

$$u = g_1 \ldots g_\nu; \quad v = g_{\nu+1} \ldots g_\tau,$$

имеем:

$$G_1 \ldots G_{\nu-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}}; \quad G_\nu \leqslant G_{\nu-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}}; \quad G_1 \ldots G_\nu \leqslant N^{\frac{2}{3}};$$
$$N^\lambda < u < N^{1-\lambda}.$$

Сумму Ω мы можем представить в форме

$$\Omega = \sum_u \sum_v \sum_m e^{2\pi i \alpha k u v m},$$

где u, v и m пробегают указанные для них значения (m пробегает числа натурального ряда) с условием

$$uvm \leqslant N.$$

Отсюда

$$\Omega = \sum_u \sum_z \varphi(z) e^{2\pi i \alpha uz},$$

где u пробегает указанные выше числа с условием

$$N^\lambda < u < N^{1-\lambda}$$

и z, при каждом данном u, пробегает целые числа с условием

$$0 < z \leqslant \frac{N}{u}.$$

При этом $\varphi(z)$ обозначает число решений уравнения

$$vm = z$$

и, следовательно, удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \ll N^{\varepsilon'}.$$

Поэтому, применяя лемму 3, находим:

$$\Omega \ll N^{1+\varepsilon''} \sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q}}.$$

9° Пусть, далее,

$$\nu = 1.$$

Тогда, полагая для краткости $l_1 = \varkappa$ и обозначая символом $\varkappa_1$ наименьшее целое число с условием

$$G_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{3}},$$

мы представим каждое d в виде произведения двух сомножителей

$$d = uv,$$

где u является произведением $\varkappa_1$ простых делителей числа g_1, а v является произведением остальных $\varkappa - \varkappa_1$ простых делителей числа g_1.

Легко видеть, что таким путем мы можем разбить на два сомножителя ровно

$$C_\varkappa^{\varkappa_1} \geqslant 1$$

различными способами. Отсюда заключаем, что

$$\Omega = \frac{1}{C_\varkappa^{\varkappa_1}} \Omega'; \quad \Omega' = \sum_u \sum_v \sum_m e^{2\pi i a k u v m},$$

причем u и v пробегают все пары значений указанного выше вида, а m, при каждой данной паре значений u и v, пробегает числа натурального ряда с условием

$$uvm \leqslant N.$$

Очевидно

$$N^{\lambda} < u.$$

Если теперь $\varkappa_1 = 1$, то имеем также

$$u \leqslant \sqrt{N} < N^{1-\lambda}.$$

Если же $\varkappa_1 > 1$, то имеем

$$G_1^{\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa}} \leqslant N^{\frac{1}{3}}; \quad u < G_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} < N^{\frac{2}{3}} < N^{1-\lambda}.$$

Таким образом, как в случае $\varkappa_1 = 1$, так и в случае $\varkappa_1 > 1$, имеем

$$N^{\lambda} < u < N^{1-\lambda}.$$

10° Теперь уже приступим к оценке суммы Ω'. Имеем

$$\Omega' = \sum \mu(\delta)\Omega'_{\delta}; \quad \Omega'_{\delta} = \sum_{u'}\sum_{v'}\sum_{m} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 u' v' m},$$

где δ пробегает все делители чисел g_1, а u' и v', при каждом данном δ, пробегают частные от деления на δ чисел u и v, одновременно кратных δ. Оценим одну из сумм Ω'_{δ}. Имеем

$$\Omega'_{\delta} = \sum_{u'}\sum_{v'}\sum_{m} e^{2\pi i \alpha k \delta^2 u' v' m},$$

где u' пробегает значения с условием

$$\frac{N^{\lambda}}{\delta} < u' < \frac{N^{1-\lambda}}{\delta},$$

где v' и m, при данном u', пробегают значения с условием

$$0 < v'm \leqslant \frac{N}{\delta^2 u'}.$$

Пусть

$$\delta < \delta_1 = \min\left(N^{\lambda}, \sqrt{\frac{N}{q}}\right).$$

Тогда имеем

$$q < \frac{N}{\delta^2}; \quad 1 < \frac{N^{\lambda}}{\delta} < \frac{N^{1-\lambda}}{\delta} < \frac{N}{\delta^2}.$$

Применяя лемму 3 с

$$\frac{N}{\delta^2} \text{ вместо } N; \quad k\delta^2 \text{ вместо } k$$

(z имеет значение, аналогичное тому, какое оно имело в 8°), получим

$$\Omega'_{\delta} \ll \frac{N^{1+\varepsilon''}}{\delta^2}\sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q\delta^2}{N} + \frac{k\delta^2}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{N^{1+\varepsilon''}}{\delta}\sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q}}.$$

При $\delta \geqslant \delta_1$ мы можем применить ту же самую оценку, так как в этом случае

$$\Omega_\delta' \ll \sum_{u'} \frac{N}{\delta^2 u'} \ll \frac{N\mu}{\delta\delta_1} \ll \frac{N\mu}{\delta}\left(N^{-\lambda} + \sqrt{\frac{q}{N}}\right)$$

Поэтому находим

$$\Omega \ll \sum_{\delta<N} \frac{N^{1+\varepsilon''}}{\delta} \sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q}} \ll N^{1+\varepsilon'''} \sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q}}\,.$$

11° Теперь рассмотрим случай, когда

$$G_1 \ldots G_\tau < N^{\frac{1}{3}}.$$

В этом случае Ω можно представить в форме

$$\Omega = \sum_d \sum_m e^{2\pi i\alpha k d m},$$

где d пробегает числа выбранного класса с условием

$$d < N^{\frac{1}{3}}$$

и m, при данном d, пробегает числа натурального ряда с условием

$$m \leqslant \frac{N}{d}\,.$$

Находим

$$\Omega \ll \sum_{d=1}^{N^\lambda} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{2(\alpha k d)}\right)$$

и, следовательно, по лемме 2 имеем

$$\Omega \ll \left(N^\lambda + q + \frac{k^2 N}{q}\right)\mu.$$

12° В виду доказанного в 8°, 10°, 11° и 5° имеем

$$T_2 \ll N^{1+\varepsilon_2} \sqrt{N^{-\lambda} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q} + \frac{k^4}{q^2}}\,.$$

А тогда из 1° теорема 1 следует непосредственно.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть δ удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant \delta \leqslant 1$$

и p пробегает простые числа $\leqslant N$.

Тогда число T значений дроби

$$\{\alpha p\},$$

не превосходящих δ, *выражается формулой*

$$T = \delta\pi(N) + R; \quad R \ll N^{1+\varepsilon_0} \sqrt{N^{-\frac{1}{3}} + \frac{q}{N} + \frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Эту теорему легко выведем из теоремы 1, если применим метод моей работы «Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена»[4], причем будем пользоваться периодической функцией леммы 14 моей книги «Новый метод в аналитической теории чисел»[5].

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 9.XI.1937.

I. VINOGRADOW. IMPROVEMENT OF THE ESTIMATION OF A TRIGONOMETRICAL SUM CONTAINING PRIMES

SUMMARY

In one of my notes * I have given new estimations of sums

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f(p)},$$

where p runs over primes. These estimations are better than my first ones for the same sums. However by further consideration I found that there was not made the most of my general method. In the present paper I give a new improvement of the estimations for the case, when

$$f(p) = \alpha p.$$

A similar improvement can be also obtained for the case when $f(p)$ is a polynomial of degree higher than the first. Besides p can run over the sequence of primes in an arithmetical progression.

THEOREM 1. *Let k be an integer* > 0; $N > 1$;

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \ (a, q) = 1; \ 0 < q \leqslant N; \ -1 \leqslant \theta \leqslant 1;$$

ε *is an arbitrary small positive constant and p runs over the primes* $\leqslant N$.

Then we have

$$\left| \sum_{p} e^{2\pi i \alpha k p} \right| \leqslant c N^{1+\varepsilon} \sqrt{N^{-\frac{1}{3}} + \frac{q}{N} + \frac{k}{q} + \frac{k^4}{q^2}},$$

where c depends only on ε.

---

[4] Известия АН СССР, 1927, стр. 567—578.

[5] Труды Матем. института им. В. А. Стеклова, т. X, 1937.

* C. R. Acad. Sci. USSR, XVII, № 4 (1937); Recueil Math., 2(44), № 5, 1937.

THEOREM 2. *Let* $N > 1$;

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2};\ (a, q) = 1;\ 0 < q \leqslant N;\ -1 \leqslant \theta \leqslant 1;$$

ε_1 *is an arbitrary small positive constant*, p *runs over the primes* $\leqslant N$ *and* δ *satisfies the condition*

$$0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

The number of the values of the fraction

$$\{\alpha p\} = \alpha p - [\alpha p]$$

not exceeding δ *satisfies the inequality*

$$|T - \delta\pi(N)| \leqslant c_1 N^{1+\varepsilon_1} \sqrt{N^{-\frac{1}{3}} + \frac{q}{N} + \frac{1}{q}},$$

where c_1 *depends only on* ε_1.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

Н. Г. ЧУДАКОВ

О ПЛОТНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ, НЕПРЕДСТАВИМЫХ КАК СУММА ДВУХ НЕЧЕТНЫХ ПРОСТЫХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается, что число тех четных чисел промежутка $(1, x)$, которые не представляются как сумма двух нечетных простых, есть величина порядка $0(x(\lg x)^{-M})$, где M — произвольное положительное число.

В переписке между Л. Эйлером и Х. Гольдбахом за 1742 г. имеется утверждение, которое на современном языке может быть высказано так:

I. Всякое четное число $\geqslant 6$ есть сумма двух нечетных простых.

Как следствие из этого утверждения получается другое утверждение:

II. Всякое нечетное число $\geqslant 9$ есть сумма трех нечетных простых.

В 1937 г. акад. И. М. Виноградову удалось доказать утверждение II для всех достаточно больших нечетных чисел. Что касается утверждения I, то оно остается до сих пор недоказанным. Однако, опираясь на замечательные исследования И. М. Виноградова о тригонометрических суммах, можно уже теперь получить важный результат, связанный с утверждением I.

Чтобы точно формулировать полученный результат, введем такое обозначение: пусть $\nu(x)$ равно числу тех четных чисел между 6 и x, которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых.

Если утверждение I верно, то $\nu(x)$ всегда равно 0. Еще в 1924 г. Hardy и Littlewood, опираясь на гипотезу Riemann'а относительно распределения нулей функций $L(s, \chi_u)$, показали, что

$$\nu(x) = O(x^{\beta}),$$

где $\beta < 1$.

В 1930 г. проф. Л. Г. Шнирельман показал, что

$$\nu(x) < \alpha x,$$

где $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. Это был первый строго доказанный факт, касающийся оценки роста $\nu(x)$.

Автор этой работы, опираясь на указанные выше исследования акад. И. М. Виноградова, и также на известную теорему Siegel'я о числе классов квадратических форм, показывает, что

$$\nu(x) < C_M \frac{x}{(\lg x)^M}, \tag{1}$$

где M — произвольное положительное число; $C_M > 0$ и зависит только от M*.

Неравенство (1) позволяет также доказать теорему Виноградова. В самом деле: в силу известной теоремы Чебышева число нечетных простых чисел $\leqslant x-6$ удовлетворяет неравенству

$$\pi_1(x) > \beta \frac{x}{\lg x} \quad (x \geqslant 7),$$

где $\beta > 0$.

Пусть x нечетное число $> \max\left(e^{\frac{c_2}{\beta}};\ 7\right)$. Пусть

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant x-6$$

суть нечетные простые числа $\leqslant x-6$. Тогда

$$r > \beta \frac{x}{\lg x}.$$

Числа

$$x-p_1, \ldots, x-p_r$$

все четные и $\geqslant 6$. В силу выбора x мы имеем

$$r > \beta \frac{x}{\lg x} > \beta \frac{x}{\lg x} \cdot \frac{\lg e^{\frac{c_2}{\beta}}}{\lg x} = c_2 \frac{x}{(\lg x)^2} > \nu(x).$$

Следовательно, среди чисел $x-p_i$ есть хотя бы одно, которое представимо как сумма двух нечетных простых, т. е.

$$x - p_i = p' + p'',$$

где p' и p'' — нечетные простые числа. Следовательно, x есть сумма трех нечетных простых.

I. Обозначения

M — заданная положительная величина;

$c_0, c_1, \ldots$ — положительные постоянные, зависящие только от M;

x — действительная переменная; $x > c_0$;

* Во время просмотра авторской корректуры этой работы в Acta Arithm., 2, 2 появилась статья V. G. van der Corput, посвященная тому же вопросу.

n — целое число; $[\sqrt{x}] \leqslant n \leqslant x$;

$\xi = (\lg x)^{M+6}$; $\zeta = \xi^{\frac{8}{3}}$; $\tau = n \cdot \xi^{-\frac{5}{3}}$;

a и q — целые числа; $a \leqslant q$;

$p, p', p'', \ldots$ — простые числа;

c_0 так велико, что $\sqrt{x} > 7$; $\tau > 3$; $\xi < \frac{\tau}{2}$; $2c_{12}\frac{(\lg\lg x)^2}{\lg x} \leqslant c_3$;

$\mu(q)$ — функция Мебиуса; $\tau(m)$ — число делителей числа m; $\varphi(q)$ — функция Эйлера;

$e(\varphi) = e^{2\pi i \varphi}$;

$$S(\alpha) = \sum_{3 \leqslant p \leqslant n} e(p\alpha);$$

$$\psi_{aq} = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=3}^{n} \frac{e\left(m\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)\right)}{\lg m};$$

$$S^2(\alpha) = \sum_{m=6}^{2n} a_m e(m\alpha);$$

$$F(\alpha) = \sum_{q \leqslant \xi} \sum_{(a,q)=1} \psi_{aq}^2(\alpha) = \sum_{m=6}^{2n} b_m e(m\alpha).$$

Легко убедиться, что a_m равно числу решений в нечетных простых уравнения:

$$m = p' + p'';$$

$$A_m(q) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e\left(-\frac{a}{q}m\right);$$

$$b_m = \sum_{m'+m''=m} \frac{1}{\lg m' \lg m''} \sum_{q=1}^{\xi} A_m(q)$$

(в первой сумме суммирование распространяется на все способы представления числа m как суммы двух положительных слагаемых, каждое из которых $\geqslant 3$).

II

ЛЕММА 1:

$$\varphi(q)\lg q \geqslant c_1 q.$$

Доказательство. Известно, что $\prod_{2 \leqslant p \leqslant q}\left(1 - \frac{1}{p}\right) > c_1(\lg q)^{-1}$;

$$\varphi(q)\lg q = q\prod_{p/q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\lg q \geqslant q \prod_{2 \leqslant p \leqslant q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\lg q \geqslant c_1 q.$$

ЛЕММА 2:

$$\sum_{\substack{m'+m''=m \\ m' \geqslant 3;\, m'' \geqslant 3}} \frac{1}{\lg m' \lg m''} \geqslant c_2 \frac{n}{(\lg n)^2},$$

если $m \geqslant n \geqslant 6$.

Доказательство. m' пробегает все значения от 3 до $m-3$; при заданном значении m' число m'' имеет определенное единственное значение; следовательно, уравнение

$$m = m' + m''$$

имеет $m-3-2=m-5$ решений.

$$\sum_{m'+m''=m} \frac{1}{\lg m' \lg m''} \geqslant \frac{m-5}{(\lg m)^2} \geqslant c_2 \frac{m}{\lg^2 m} \geqslant c_2 \frac{n}{\lg^2 n}.$$

ЛЕММА 3:

$$A_m(qq') = A_m(q) \cdot A_m(q'),$$

если $(q, q') = 1$.

Доказательство. Известно, что

$$\mu(qq') = \mu(q) \cdot \mu(q'); \quad \varphi(qq') = \varphi(q)\varphi(q').$$

Далее

$$\sum_{(a,q)=1} e\left(-\frac{a}{q} m\right) \sum_{(a',q')=1} e\left(-\frac{a'}{q'} m\right) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ (a',q')=1}} e\left(-\frac{aq'+a'q}{qq'} m\right);$$

но $aq' + a'q$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю qq'; следовательно,

$$\sum_{(a,q)=1} e\left(-\frac{a}{q} m\right) \sum_{(a',q')=1} e\left(-\frac{a'}{q'} m\right) = \sum_{(a'',qq')} e\left(-\frac{a''}{qq'} m\right).$$

ЛЕММА 4:

1° *Ряд* $\sum_{q=1}^{\infty} |A_m(q)|$ *сходится.*

2° $\sum_{q=1}^{\infty} A_m(q) = \prod_{p/m}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{p \nmid m}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$

3° $\sum_{q=1}^{\infty} A_m(q) \geqslant c_3 > 0$ *для* $m \equiv 0 \pmod 2$.

4° $\left|\sum_{q=1}^{\xi} A_m(q)\right| > c_4 > 0$ *для* $m \equiv 0 \pmod 2$; $\tau(m) \leqslant \xi (\lg x)^{-1}$.

Доказательство. 1° Прежде всего ясно, что

$$A_m(p) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(p-1)^2}, & \text{если } p \nmid m \\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p/m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|A_m(q)| \leqslant \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(q) = 0, \\ \dfrac{(q,m)}{\varphi^2(q)}; & \text{если } \mu(q) \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому в силу леммы 1

$$\sum_{q=1}^{\infty} | A_m(q) | \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(q, m)}{\varphi^2(q)} \leqslant m \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^2(q)} \leqslant \frac{m}{c_1^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lg^2 q}{q^2}. \tag{2}$$

2° В силу леммы 3 и (2) мы можем написать:

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_m(q) = \prod_p (1 + A_m(p)) = \prod_{p/m} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

3° Если $m \equiv 0 \pmod 2$, то

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_m(q) \geqslant \prod_{p \geqslant 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqslant \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = c_3 > 0. \tag{3}$$

4° Пусть $m \equiv 0 \pmod 2$; $\tau(m) \leqslant \xi (\lg x)^{-1}$.

$$\left| \sum_{q=1}^{\xi} A_m(q) \right| \geqslant \left| \sum_{q=1}^{\infty} A_m(q) \right| - \left| \sum_{q=[\xi]+1}^{\infty} A_m(q) \right|. \tag{4}$$

$$\left|\sum_{q=[\xi]+1}^{\infty} A_m(q) \right| \leqslant \sum_{q=[\xi]+1}^{\infty} \frac{(q, m)}{\varphi^2(q)} \leqslant \frac{1}{c_1^2} \sum_{q=[\xi]+1}^{\infty} \frac{(q, m) \lg^2 q}{q^2} \leqslant c_5 \sum_{d/m} d \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1} \frac{\lg^2 ds}{d^2 s^2} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \sum_{d/m} \frac{1}{d} \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1}^{\infty} \frac{\lg^2 d + 2 \lg d \lg s + \lg^2 s}{s^2} =$$

$$= c_5 \sum_{\substack{d/m \\ d \leqslant \xi}} \frac{1}{d} \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1}^{\infty} \frac{\lg^2 d + 2 \lg d \lg s + \lg^2 s}{s^2} +$$

$$+ c_6 \sum_{\substack{d/m \\ d > \xi}} \frac{1}{d} (\lg^2 d + \lg d + 1) = s_1 + s_2. \tag{5}$$

$$s_1 \leqslant c_5 \sum_{\substack{d/m \\ d \leqslant \xi}} \left(\frac{\lg^2 d}{d} \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{s^2} + \frac{2 \lg d}{d} \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1}^{\infty} \frac{\lg s}{s^2} + \frac{1}{d} \sum_{s=\left[\frac{\xi}{d}\right]+1} \frac{\lg^2 s}{s^2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_7 \sum_{\substack{d/m \\ d \leqslant \xi}} \left(\frac{\lg^2 d}{d} \cdot \frac{d}{\xi} + \frac{\lg d}{d} \frac{\lg \frac{\xi}{d}}{\frac{\xi}{d}} + \frac{1}{d} \frac{\lg^2 \frac{\xi}{d}}{\frac{\xi}{d}} \right) \leqslant c_8 \sum_{\substack{d/m \\ d \leqslant \xi}} \frac{\lg^2 \xi}{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant c_9 (\lg \lg x)^2 \frac{\tau(m)}{\xi} \leqslant c_9 \frac{(\lg \lg x)^2}{\lg x}. \tag{6}$$

$$s_2 < c_{10} \frac{\lg^2 \xi}{\xi} \sum_{d/m} 1 \leqslant c_{11} (\lg \lg x)^2 \frac{\tau(m)}{\xi} \leqslant c_{10} \frac{(\lg \lg x)}{\lg x}. \tag{7}$$

(5), (6) и (7) дают

$$\left| \sum_{q=[\xi]+1}^{\infty} A_m(q) \right| \leqslant c_{12} \frac{(\lg \lg x)^2}{\lg x} \leqslant \frac{c_3}{2}. \tag{8}$$

(3), (4) и (8) дают

$$\left|\sum_{q=1}^{\xi} A_m(q)\right| \geqslant c_3 - \frac{c_3}{2} = c_4 > 0.$$

ЛЕММА 5. *Пусть* $m \equiv 0 \pmod{2}$; $\tau(m) \leqslant \xi(\lg x)^{-1}$; $m \geqslant n$; $x \geqslant c_0$.

Тогда

$$|b_m| \geqslant c_{13} \frac{n}{\lg^2 n}.$$

Доказательство. В силу леммы 2 и леммы 4

$$|b_m| \geqslant \left|\sum_{m'+m''=m} \frac{1}{\lg m' \lg m''}\right| \cdot \left|\sum_{q=1}^{\xi} A_m(q)\right| \geqslant c_2 \frac{n}{\lg^2 n} c_4 \geqslant c_{13} \frac{n}{\lg^2 n}.$$

ЛЕММА 6. *Пусть* $\nu_2(x)$ *равно числу чисел* n *промежутка* $(1, x)$, *которые удовлетворяют двум условиям:*

1° n *не равно сумме двух нечетных простых*,

2° $\tau(n) \geqslant \xi(\lg x)^{-1}$.

Тогда

$$\nu_2(x) \leqslant c_{14} x (\lg x)^{-M}.$$

Доказательство. Известно, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(x) \leqslant c_{14} x \lg x.$$

Следовательно,

$$\xi(\lg x)^{-1} \nu_2(x) \leqslant c_{14} x \lg x;$$
$$\nu_2(x) \leqslant c_{14} x (\lg x)^{-M}.$$

ЛЕММА 7. *Пусть* $\pi(m, q, l)$ *число простых чисел промежутка* $(1, m)$, *принадлежащих прогрессии* $q\varsigma + l$; $(q, l) = 1$.

Тогда

$$\pi(m, q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{s=2}^{m} \frac{1}{\lg s} + O\left(m e^{-c_{16}\sqrt{\lg m}}\right) + O\left(\frac{m^\sigma}{\varphi(q) \lg m}\right),$$

где σ — *наибольший из действительных корней всех* L-*рядов, принадлежащих действительным характерам модуля* $\leqslant q$.

Доказательство — см. ([1]).

ЛЕММА 8:

$$1 - \sigma \geqslant c_{16} q^{-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$.

Доказательство — см. ([2]) и ([3]).

ЛЕММА 9. *Пусть* $3 \leqslant m \leqslant n$; $n \geqslant [\sqrt{x}]$; $q \leqslant \zeta$,

$$\pi(m, q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{s=2}^{m} \frac{1}{\lg s} + \Delta(m).$$

Тогда

$$|\Delta(m)| \leqslant c_{17} \zeta^{-2} \xi^{-\frac{13}{6}} n \quad (m = 3, \ldots, n).$$

Доказательство. Полагаем в лемме 8 $\varepsilon = \frac{3}{8}(M+7)^{-1}$. Тогда

$$1-\sigma \geqslant c_{16}\, q^{-\frac{3}{8}(M+7)^{-1}} \geqslant c_{16}\, \zeta^{-\frac{3}{8}(M+7)^{-1}} = c_{16}(\lg x)^{-\frac{M+6}{M+7}}. \tag{9}$$

В силу леммы 7 и (9)

$$|\Delta(m)| \leqslant O\left(ne^{-c_8\sqrt{\lg x}}\right) + O\left(ne^{-c_{18}(\lg x)^{\frac{1}{M+7}}}\right) \leqslant c_{17}\, n\zeta^{-2}\xi^{-\frac{13}{6}}.$$

Пусть $\mathfrak{A}_\tau$ совокупность всех правильных несократимых дробей, знаменатель которых $\leqslant \tau$ (ряд Farey'я). К совокупности $\mathfrak{A}_\tau$ будем причислять и 1. Пусть $\frac{a}{q}$ и $\frac{a'}{q'}$ две соседние дроби из совокупности $\mathfrak{A}_\tau$. Назовем «медиантою» дробь

$$\frac{a+a'}{q+q'}.$$

Медианта лежит между $\frac{a}{q}$ и $\frac{a'}{q'}$. Составим всевозможные медианты всех пар дробей из $\mathfrak{A}_\tau$. Совокупность медиант назовем совокупностью $\mathfrak{B}_\tau$. Дроби, принадлежащие $\mathfrak{B}_\tau$, разделяют весь интервал $(0, 1)$ на частичные интервалы.

Пусть C_{aq} тот частичный интервал, который содержит $\frac{a}{q}$. Пусть $\lambda_{a,q}$ длина C_{aq}. Известно, что для двух соседних дробей из $\mathfrak{A}_\tau$ имеет место соотношение:

$$q+q' \geqslant [\tau]+1,$$
$$aq'-a'q = \pm 1.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{a+a'}{q+q'} - \frac{a}{q}\right| = \frac{1}{q(q+q')} \leqslant \frac{1}{\tau q}; \tag{10}$$

$$\lambda_{ab} \leqslant c_{19}\frac{1}{\tau q}. \tag{11}$$

ЛЕММА 10. *Пусть* $\alpha \subset C_{aq}$; $(a, q) = 1$; $q \leqslant \zeta$. *Тогда*

$$|S(\alpha) - \psi_{aq}(\alpha)| < c_{20}\, n\xi^{-\frac{1}{2}}\zeta^{-1}.$$

Замечание. Во всех следующих леммах интервалы $\left(0; \frac{1}{\tau}\right)$ и $\left(1-\frac{1}{\tau}; 1\right)$ объединяются в одну совокупность точек. Если $q=1$; $a=0, 1$, то

$$\psi_{aq}(\alpha) = \sum_{m=3}^{n}\frac{e(m\alpha)}{\lg m} = \sum_{m=3}^{n}\frac{e(m\vartheta)}{\lg m},$$

где $\vartheta \begin{cases} = \alpha, & \text{если } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{\tau}, \\ = \alpha - 1, & \text{если } 1-\frac{1}{\tau} \leqslant \alpha \leqslant 1. \end{cases}$

Доказательство. Полагаем $\alpha = \frac{a}{q} + \vartheta$. Очевидно, что

$$\left| S(\alpha) - \sum_{p \nmid q} e(p\alpha) \right| \leqslant c_{21} \lg q \leqslant c_{22} n \xi^{-\frac{1}{2}} \zeta^{-1}; \tag{12}$$

$$\sum_{p \nmid q} e(p\alpha) = \sum_{p \nmid q} e\left(\frac{ap}{q} + p\vartheta\right) = \sum_{p \nmid q} e\left(\frac{l}{q}\right) e(p\vartheta) =$$

$$= \sum_{(l,q)=1} e\left(\frac{l}{q}\right) \sum_{\substack{p \equiv l' \\ p \leqslant n}}' e(p\vartheta), \tag{13}$$

где

$$ap \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q); \;\; 1 \leqslant l < q; \;\; al' \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q); \;\; 1 \leqslant l' < q.$$

Но

$$\sum_{\substack{p \equiv l' \\ p \leqslant n}} e(p\vartheta) = \sum_{m=3}^{n} e(m\vartheta) [\pi(m; q, l') - \pi(m-1; q, l')]. \tag{14}$$

Вспомнив обозначения леммы 9, мы можем написать:

$$\pi(m; q, l') - \pi(m-1; q, l') = \frac{1}{\varphi(q) \lg m} + \Delta(m) - \Delta(m-1). \tag{15}$$

(14) и (15) дают нам

$$\sum_{\substack{p \equiv l' \\ p \leqslant n}} e(p\vartheta) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{m=3}^{n} \frac{e(m\vartheta)}{\lg m} + \sum_{m=3}^{n} e(m\vartheta) [\Delta(m) - \Delta(m-1)]. \tag{16}$$

Но

$$\sum_{m=3}^{n} e(m\vartheta) [\Delta(m) - \Delta(m-1)] = \Big| -\Delta(2) e(3\vartheta) + \sum_{m=3}^{n-1} \Delta(m) [e(m\vartheta) -$$

$$- e((m+1)\vartheta)] + \Delta(n) e(n\vartheta) \Big|.$$

В силу леммы 9 и (10) имеем

$$\max_{3 \leqslant m \leqslant n-1} |\Delta(m)| \leqslant c_{17} n \zeta^{-2} \xi^{-\frac{13}{6}},$$

$$|\vartheta| \leqslant \frac{1}{\tau}.$$

Кроме того,

$$|e(m\vartheta) - e((m+1)\vartheta)| \leqslant 2\pi |\vartheta|.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{m=3}^{n} e(m\vartheta)[\Delta(m)-\Delta(m-1)]\right| \leqslant c_{23}+2\pi|\vartheta| n \max_{3\leqslant m\leqslant n-1} |\Delta(m)+|\Delta(n)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{24} n \zeta^{-2} \xi^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Наконец, хорошо известно, что

$$\sum_{(a,q)=1} e\left(\frac{l}{q}\right)=\mu(q); \tag{18}$$

(13), (16), (17) и (18) дают нам

$$\left|\sum_{p \not\equiv q} e(p\alpha)-\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=3}^{n} \frac{e(m\vartheta)}{\lg m}\right| \leqslant c_{24} n \zeta^{-2} \xi^{-\frac{1}{2}} \sum_{(l,q)=1} 1 \leqslant c_{24} n \zeta^{-1} \xi^{-\frac{1}{2}}; \tag{19}$$

из (12) и (19), принимая во внимание, что $\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum\limits_{m=3}^{n} \frac{e(m\vartheta)}{\lg m}=\psi_{aq}(\alpha)$, следует, что

$$|S(\alpha)-\psi_{aq}(\alpha)| \leqslant c_{20} n \zeta^{-1} \xi^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

ЛЕММА 11:

$$\sum_{q\leqslant\zeta} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |S^2(\alpha)-\psi_{aq}^2(\alpha)|^2 \, d\alpha < c_{25} n^3 \xi^{-1}.$$

Доказательство.

$$|S^2(\alpha)-\psi_{aq}^2(\alpha)| < c_{26} |S(\alpha)-\psi_{aq}(\alpha)|^2 (|S(\alpha)|^2+|\psi_{aq}(\alpha)|^2).$$

Но в силу леммы 10

$$|S(\alpha)-\psi_{aq}(\alpha)|^2 < c_{27} n^2 \xi^{-1} \zeta^{-2};$$

$$\int_{C_{aq}} |S^2(\alpha)-\psi_{aq}^2(\alpha)|^2 \, d\alpha < c_{28} n^2 \xi^{-1} \zeta^{-2}\left(\int_{C_{aq}} |S(\alpha)|^2 \, d\alpha+\int_{C_{aq}} |\psi_{aq}(\alpha)|^2 \, d\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{28} n^2 \xi^{-1} \zeta^{-2}\left(\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \, d\alpha+\int_0^1 |\psi_{aq}(\alpha)|^2 \, d\alpha\right). \tag{21}$$

Но

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \, d\alpha=\sum_{3\leqslant p\leqslant n} 1 \leqslant c_{29} n (\lg n)^{-1}, \\ &\int_0^1 |\psi_{aq}(\alpha)|^2 \, d\alpha=\sum_{m=3}^{n} \frac{1}{\varphi^2(q) \lg^2 m} \leqslant c_{30} n (\lg n)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(21) и (22) дают нам:

$$\sum_{q\leqslant\zeta}\sum_{(a,q)=1}\int_{C_{aq}}|S^2(\alpha)-\psi_{aq}^2(\alpha)|\,d\alpha<$$

$$<c_{28}n^2\xi^{-1}\zeta^{-2}(c_{29}+c_{30})n(\lg n)^{-1}\sum_{q\leqslant\zeta}\sum_{(a,q)=1}1\leqslant c_{25}n^3\xi^{-1}$$

ЛЕММА 12. *Пусть* $\tau\geqslant q>\zeta$; $(a,q)=1$; *тогда*

$$\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|<c_{31}n\lg^2 n\cdot\zeta^{-\frac{1}{3}}.$$

Доказательство — см. ([4]) и ([5]). Нужно только положить $\zeta=c(\lg n)^r$ (см. обозначения в последней из указанных статей).

ЛЕММА 13:

$$\sum_{\tau\geqslant q\geqslant Q}\sum_{(a,q)=1}\int_{C_{aq}}|\psi_{aq}(\alpha)|^4\,d\alpha<c_{32}n^3\xi^{\frac{5}{3}}Q^{-3},$$

где Q — любое положительное число $\leqslant\tau$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$|\psi_{aq}(\alpha)|^4\leqslant\frac{1}{\varphi^4(q)}\left|\sum_{m=3}^{n}\frac{e\left(m\left(\alpha-\frac{a}{q}\right)\right)}{\lg m}\right|^4\leqslant\frac{c_{33}\lg^4 q\cdot n^4}{q^4\lg^4 n}\leqslant c_{34}\frac{n^4}{q^4}.$$

Следовательно, имея в виду (11), можем написать

$$\sum_{\tau\geqslant q\geqslant Q}\sum_{(a,q)=1}\int_{C_{aq}}|\psi_{aq}(\alpha)|^4\,d\alpha\leqslant c_{35}\frac{n^4}{\tau}\sum_{q=[Q]}^{\infty}\frac{1}{q^4}<c_{32}n^3\xi^{\frac{5}{3}}Q^{-3}.$$

ЛЕММА 14:

$$\sum_{q>\zeta}\sum_{(a,q)=1}\int_{C_{aq}}|S(\alpha)|^4\,d\alpha<c_{36}n^3\xi^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha\subset C_{aq}$; $\alpha=\frac{a}{q}+\vartheta$. Тогда в силу (10)

$$|\vartheta|\leqslant\frac{1}{q\tau}\leqslant\frac{1}{\zeta\tau}\leqslant\frac{1}{n\xi}.$$

Значит,

$$\left|S(\alpha)-S\left(\frac{a}{q}\right)\right|<\left|\sum_{3\leqslant p\leqslant n}\left(e\left(\frac{ap}{q}+\vartheta p\right)-e\left(\frac{ap}{q}\right)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{37}|\vartheta|\frac{n^2}{\lg n}\leqslant c_{37}n\xi^{-1}. \tag{23}$$

Но в силу леммы 12

$$\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|<c_{31}n\lg^2 n\,\zeta^{-\frac{1}{3}}=c_{31}n\lg^2 n\,\xi^{-\frac{8}{9}} \tag{24}$$

(23) и (24) дают нам:

$$\max_{\alpha \subset C_{aq}} |S(\alpha)| \leqslant c_{38} n \lg^2 n \xi^{-\frac{8}{9}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{q>\zeta} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |S(\alpha)|^4 d\alpha \leqslant \sum_{q>\zeta} \sum_{(a,q)=1} \max_{\alpha \subset C_{aq}} |S(\alpha)|^2 \int_{C_{aq}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c_{38}^2 n^2 \lg^4 n \xi^{-\frac{16}{9}} \sum_{q>\zeta} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant c_{38}^2 n^2 \lg^4 n \xi^{-\frac{16}{9}} \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c_{39} n^3 \lg^3 n \xi^{-\frac{16}{9}} \leqslant c_{36} n^3 \xi^{-1}.$$

ЛЕММА 15:

$$\sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} \Bigg| \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{\substack{(a',q')=1 \\ (a'q-aq')\neq 0}} \psi_{a'q'}^2(\alpha) \Bigg|^2 d\alpha \leqslant c_{40} n^3 \xi^{-1} (\lg\lg x)^4.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \subset C_{aq}$; $\alpha = \frac{a}{q} + \vartheta$. Вследствие того что функции $e\left(m\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)\right)$ имеют период $\alpha = 1$, мы каждую дробь $\frac{a'}{q'}$ можем заменить такой дробью $\frac{a''}{q'}$, которая удовлетворяет условиям:

$$0 < \left| \frac{a''}{q'} - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{2}; \quad (a'', q') = 1, \quad \psi_{a'',q'}(\alpha) = \psi_{a',q'}(\alpha). \tag{25}$$

Совокупности дробей $\left\{\frac{a''}{q'}\right\}$ и $\left\{\frac{a'}{q'}\right\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии. Следовательно,

$$\Bigg| \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{\substack{(a',q')=1 \\ a'q-aq'\neq 0}} \psi_{a'q'}^2(\alpha) \Bigg|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg| \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{0 < \left|\frac{a''}{q'} - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \psi_{a'',q'}^2(\alpha) \Bigg|^2 \leqslant c_{41} \xi^2 \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{0 < \left|\frac{a''}{q'} - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2}} \cdot \left| \psi_{a'',q'}(\alpha) \right|^4. \tag{26}$$

Но

$$|\psi_{a''q'}(\alpha)|^4 = \frac{1}{\varphi^4(q')} \left| \sum_{m=3}^{n} \frac{e\left(m\left(\alpha - \frac{a''}{q}\right)\right)}{\lg m} \right|^4 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{42}}{\varphi^4(q')} \max_{3 \leqslant n' \leqslant n} \left| \sum_{m=3}^{n'} e\left(m\left(\alpha - \frac{a''}{q'}\right)\right) \right|^4 \leqslant \frac{c_{42}}{\varphi^4(q')} \frac{1}{\left| \sin\pi\left(\alpha - \frac{a''}{q'}\right) \right|^4}. \tag{27}$$

Но в силу (25) мы имеем:

$$\left|\alpha-\frac{a''}{q'}\right|\leqslant\left|\frac{a}{q}-\frac{a''}{q'}\right|+|\vartheta|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{\tau q}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}, \qquad (28)$$

ибо $\tau>3$.

Далее, $\tau\geqslant 2\xi$, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}|\vartheta|\leqslant\frac{1}{\tau q}\leqslant\frac{1}{2\xi q}\leqslant\frac{1}{2q'q}\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{a''}{q'}-\frac{a}{q}\right|,\\ \left|\alpha-\frac{a''}{q'}\right|\geqslant\left|\frac{a}{q}-\frac{a''}{q'}\right|-|\vartheta|\geqslant\frac{1}{2}\left|\frac{a''}{q'}-\frac{a}{q}\right|.\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Кроме того, в интервале $-\frac{5}{6}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{5}{6}\pi$ имеет место неравенство

$$|\sin\varphi|\geqslant c_{43}|\varphi|. \qquad (30)$$

Лемма 1, (27), (28), (29) и (30) дают нам:

$$|\psi_{a''q'}(\alpha)|^4<c_{44}\frac{\lg^4 q'}{q'^4}\frac{1}{\left|\alpha-\frac{a''}{q'}\right|^4}\leqslant c_{45}(\lg\lg x)^4 q^4\frac{1}{|aq'-a''q|^4}. \qquad (31)$$

В силу (11), (26) и (31) имеем:

$$\sum_{q=1}^{\tau}\sum_{(a,q)=1}\int\limits_{C_{aq}}\Bigl|\sum_{q'\leqslant\xi}\sum_{\substack{(a',q')=1\\ a'q-aq'\neq 0}}\psi^2_{a'q'}(\alpha)\Bigr|^2 d\alpha\leqslant c_{46}(\lg\lg x)^4\xi^2\tau^{-1}\sum_{q=1}^{\tau}\sum_{(a,q)=1}\times$$

$$\times\frac{1}{q}q^4\sum_{q'\leqslant\xi}\sum_{\substack{-\frac{1}{2}q'\leqslant a''\leqslant\frac{3}{2}q'\\ aq'-a''q\neq 0}}\frac{1}{|aq'-a''q|^4}\leqslant c_{46}(\lg\lg x)^4\xi^2\tau^2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\mu(s)}{s^4}, \qquad (32)$$

где

$$1\leqslant q\leqslant\tau;\quad 1\leqslant q'\leqslant\xi;\quad -\frac{1}{2}\xi\leqslant a''\leqslant\frac{3}{2}\xi;$$

$$s=aq'-a''q;\quad s\neq 0,$$

$\mu(s)$ — число решений в целых числах уравнения $s=aq'-a''q$ при заданном s и при q, q', a'', меняющихся в указанных выше границах.

Оценим теперь $\mu(s)$. Если задана тройка чисел q, q' и a'', то a определяется единственным образом.

Переменное q пробегает не более чем τ значений; q' — не более чем ξ значений; a'' — не более чем $2\left[\frac{3}{2}\xi\right]+1\leqslant 4\xi$ значений. Значит,

$$\mu(s)\leqslant c_{47}\xi^2\tau. \qquad (33)$$

(32) и (33) дают

$$\sum_{q=1}^{\tau}\sum_{(a,q)=1}\int\limits_{C_{aq}}\Bigl|\sum_{q'\leqslant\xi}\sum_{\substack{(a',q')=1\\ a'q-aq'\neq 0}}\psi^2_{a'q'}(\alpha)\Bigr|^2 d\alpha<c_{40}(\lg\lg x)^4\xi^4\tau^3\leqslant c_{40}(\lg\lg x)^4 n^3\xi^{-1}.$$

III. Доказательство основной теоремы

$$1^\circ \quad \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S^2(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha) |^2 \, d\alpha =$$

$$= \sum_{q \leqslant \zeta} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S^2(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha) |^2 \, d\alpha + c_{48} \sum_{q > \zeta} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S(\alpha) |^4 \, d\alpha +$$

$$+ c_{48} \sum_{q > \zeta} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} | \psi_{aq}(\alpha) |^4 \, d\alpha. \qquad (34)$$

Но лемма 11 дает

$$\sum_{q \leqslant \zeta} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S^2(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha) |^2 \, d\alpha < c_{25} n^3 \xi^{-1}; \qquad (35)$$

лемма 14 дает

$$\sum_{q > \zeta} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S(\alpha) |^4 \, d\alpha < c_{36} n^3 \xi^{-1}. \qquad (36)$$

Наконец, полагая в лемме 13

$$Q = \zeta,$$

получаем

$$\sum_{\tau \geqslant q \geqslant \zeta} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | \psi_{aq}(\alpha) |^4 \, d\alpha < c_{32} n^3 \xi^{\frac{5}{3}} \zeta^{-3} = c_{32} n^3 \xi^{-1}. \qquad (37)$$

Из (34), (35), (36) и (37) имеем:

$$\sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | S^2(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha) |^2 \, d\alpha \leqslant c_{49} n^3 \xi^{-1}. \qquad (38)$$

$$2^\circ \quad \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | F(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha) |^2 \, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} \Big| \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{\substack{(a',\,q')=1 \\ a'q - aq' \neq 0}} \psi_{a'q'}^2(\alpha) \Big|^2 d\alpha +$$

$$+ 2 \sum_{q > \xi} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} | \psi_{aq}(\alpha) |^4 \, d\alpha. \qquad (39)$$

Но в силу леммы 15

$$\sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,\,q)=1} \int_{C_{aq}} \Big| \sum_{q' \leqslant \xi} \sum_{\substack{(a'q')=1 \\ a'q - aq' \neq 0}} \psi_{a'q'}^2(\alpha) \Big|^2 d\alpha \leqslant c_{40} n^3 \xi^{-1} (\lg \lg x)^4. \qquad (40)$$

Далее, полагая в лемме 13

$$Q = \xi,$$

получаем

$$\sum_{q>\xi} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |\psi_{aq}(\alpha)|^4 \, d\alpha \leqslant c_{32} n^3 \xi^{\frac{5}{3}} \xi^{-3} \leqslant c_3 n^3 \xi^{-1}. \tag{41}$$

Из (39), (40) и (41) имеем:

$$\sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |F(\alpha) - \psi_{aq}^2(\alpha)|^2 \, d\alpha \leqslant c_{50} n^3 \xi^{-1} (\lg\lg x)^4; \tag{42}$$

(38) и (42) дают нам

$$\int_0^1 |S^2(\alpha) - F(\alpha)|^2 \, d\alpha =$$

$$= \sum_{q=1}^{\tau} \sum_{(a,q)=1} \int_{C_{aq}} |S^2(\alpha) - F(\alpha)|^2 \, d\alpha \leqslant c_{51} n^3 \xi^{-1} (\lg\lg x)^4. \tag{43}$$

3° Пусть переменное μ пробегает совокупность значений, которые удовлетворяют трем условиям:

a) μ четное число,

b) μ не равно сумме двух нечетных простых,

c) $\tau(\mu) \leqslant \xi (\lg x)^{-1}$.

Пусть $\nu_1(x)$ число значений μ в промежутке $(1, x)$. Очевидно, что если $6 \leqslant x \leqslant c_0$, то

$$\nu(x) = \nu_1(x) + \nu_2(x) \leqslant x \leqslant c_0 \leqslant c_{52} x (\lg x)^{-M}. \tag{44}$$

Пусть $x > c_0$. Прежде всего очевидно, что

$$a_\mu = 0.$$

Следовательно, при $[\sqrt{x}] \leqslant n \leqslant x$

$$\sum_{n+1 \leqslant \mu \leqslant 2n} |b_\mu|^2 \leqslant \sum_{m=n+1}^{2n} |a_m - b_m|^2 \leqslant \sum_{m=6}^{2n} |a_m - b_m|^2 =$$

$$= \int_0^1 |S^2(\alpha) - F(\alpha)|^2 \, d\alpha. \tag{45}$$

Из (43) и (45) имеем:

$$\sum_{n+1 \leqslant \mu \leqslant 2n} |b_\mu|^2 \leqslant c_{51} n^3 \xi^{-1} (\lg\lg x)^4 \tag{46}$$

и

$$\tau(\mu) \leqslant \xi (\lg x)^{-1}.$$

С другой стороны, $x > c_0$; $\mu \geqslant n+1$; μ четное число; следовательно, выполнены условия леммы 5; значит,

$$|b_\mu|^2 \geqslant c_{13}^2 \frac{n^2}{\lg^4 n}; \tag{47}$$

(46) и (47) дают нам

$$[\nu_1(2n) - \nu_1(n)] c_{13}^2 \frac{n^3}{\lg^4 n} \leqslant c_{51} n^3 \xi^{-1} (\lg\lg x)^4,$$

$$\nu_1(2n) - \nu_1(n) \leqslant c_{52} x \xi^{-1} \lg^4 x (\lg\lg x)^4. \tag{48}$$

4° Очевидно, что

$$\nu_1(x) \leqslant \nu_1(\sqrt{x}) + \sum_{s=0}^{s=s_0} [\nu_1(2^{s+1}T) - \nu_1(2^s T)], \tag{49}$$

где $T = [\sqrt{x}]$; $s_0 = \left[\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{x}{T}\right]$.

Все числа

$$2^s T \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0)$$

удовлетворяют условиям, при которых неравенство (48) имеет место; следовательно,

$$\nu_1(2^{s+1}T) - \nu_1(2^s T) \leqslant c_{52} x \xi^{-1} \lg^4 x (\lg\lg x)^4 \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0). \tag{50}$$

Из (49) и (50) имеем:

$$\nu_1(x) \leqslant \nu_1(\sqrt{x}) + (s_0+1) c_{52} x \xi^{-1} \lg^4 x (\lg\lg x)^4 \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{x} + c_{53} x \xi^{-1} \lg^5 x (\lg\lg x)^4 \leqslant c_{54} x \xi^{-1} \lg^6 x = c_{54} x (\lg x)^{-M}. \quad (51$$

Лемма 6 и (51) дают нам

$$\nu(x) = \nu_1(x) + \nu_2(x) \leqslant c_{55} x (\lg x)^{-M} \quad (\text{при } x > c_0); \tag{52}$$

(44) и (52) дают окончательно

$$\nu(x) \leqslant c_{56} x (\lg x)^{-M},$$

при $6 \leqslant x < \infty$.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
14. XI. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Page A., On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. of the London Math. Soc., 1935, ser. 2, **39**, pp. 116—141.

[2] Siegel C. L., Acta Arithmetica, 1936, I, S. 83—86.

[3] Walfisz A., Zur additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschr., Bd. 40, S. 597 (Hilfssatz 2).

[4] Vinogradow I., Some theorems concerning the theory of primes, Математический сборник, 1937, т. 2(44), вып. 2.

[5] Чудаков Н. Г., О теореме Гольдбаха, Усп. матем. наук, 1937, вып. 4.

N. TCHUDAKOFF. ON THE DENSITY OF THE SET OF EVEN NUMBERS WHICH ARE NOT REPRESENTABLE AS A SUM OF TWO ODD PRIMES

SUMMARY

In this paper I prove the following theorem:

THEOREM. *Let* $\nu(x)$ *be the number of even numbers of the interval* $(1, x)$ *which are not representable as a sum of two odd primes.*

Then

$$\nu(x) \leqslant C_M\, x\, (\lg x)^{-M}; \quad 6 \leqslant x < \infty,$$

where M *is an arbitrary positive number;* C_M *is a positive constant depending only on* M.

The proof of this theorem is based on the recent Vinogradow's (4) and Siegel's (2) works.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Ю. В. ЛИННИК

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ FROBENIUS'А И УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ ЕЕ С ТЕОРЕМОЙ HURWITZ'А О КОМПОЗИЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается обобщение известной теоремы Frobenius'а о том, что только кватернионы над полем реальных чисел дают «алгебру» ассоциативную и не имеющую делителей нуля. Эта абстрактная теорема имеет одним из своих следствий теорему Hurwitz'а о возможности композиции у квадратичных форм только с двумя, четырьмя и восемью переменными.

1. Frobenius в 1882 г. показал, что над полем всех реальных чисел только кватернионы и их подалгебры обладают одновременно свойствами ассоциативности и отсутствием делителей нуля (среди всех линейных алгебр с конечным базисом) (1). В 1898 г. Hurwitz'ом было установлено отсутствие композиции в смысле Gauss'а у квадратичных форм с числом переменных более 8 (2). Целью настоящей работы является такое обобщение теоремы Frobenius'а, из которого последнее обстоятельство вытекает как следствие и получает интерпретацию с помощью неассоциативных алгебр.

2. ТЕОРЕМА. *Среди всех алгебр ранга 2 над полем всех реальных чисел только в алгебре Cayley* (3) *и ее подалгебрах имеют смысл и место равенства* $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$ *для всех элементов* a *алгебры при* $b \neq 0$.

Для доказательства необходимо использовать несколько лемм. Будем впредь называть алгебру, удовлетворяющую условиям теоремы, искомой, и греческими буквами обозначать только реальные числа. Искомая алгебра должна содержать модуль 1 и вместе с $b \neq 0$ должна иметь такое b^{-1}, что $b^{-1} \cdot b = b \cdot b^{-1} = 1$. Очевидно, она не имеет делителей нуля.

3. ЛЕММА 1. *Если в искомой алгебре существуют числа* E *и* F *такие, что* E, F, 1 *независимы и*

$$E^2 = -\lambda^2, \quad F^2 = -\mu^2, \quad \text{то} \quad EF + FE = \sigma$$

реально и при любых ρ *и* τ $(E + \tau F)^2 = -\nu^2$.

Доказательство([1]). Имеем

$$(E+F)^2 = \alpha E + \alpha F + \beta = -\lambda^2 - \mu^2 + EF + FE,$$
$$(E-F)^2 = \alpha' E - \alpha' F + \beta' = -\lambda^2 - \mu^2 - EF - FE.$$

Складывая, находим:

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \alpha - \alpha' = 0;$$

следовательно, $\alpha = \alpha' = 0$ и $EF + FE = \beta + \lambda^2 + \mu^2 = \sigma$ реально. Значит, при любых ρ и τ, $(\rho E + \tau F)^2 = -\nu^2$, где ν реально в виду отсутствия делителей нуля.

4. ОСНОВНАЯ ЛЕММА 2. *Пусть в искомой алгебре имеется $m+1$ чисел $1, e_1, \ldots, e_{m-1}, E_m$ таких, что*

1° $$e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_{m-1}^2 = E_m^2 = -1; \quad (e_i e_j)^2 = -\lambda_{ij}^2;$$
$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m-1)$$

2° *Числа $1, e_1, \ldots, e_{m-1}, 1 \cdot E_m, e_1 \cdot E_m, \ldots, e_{m-1} \cdot E_m$ независимы.*

Тогда возможно отыскать такое e_m, не зависимое от $1, e_1, \ldots e_{m-1}$, что $e_m^2 = -1$ и $(e_i e_m)^2 = -\sigma_{im}^2$ реально $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Доказательство. Очевидно, существует реальное α такое что $(e_1 E_m - \alpha)^2 = -\lambda^2$, ибо искомая алгебра ранга 2. Имеем:

$$e_1 E_m - \alpha = e_1 E_m + \alpha e_1 \cdot e_1 = e_1 (E_m + \alpha e_1).$$

Числа e_1, E_m и 1 независимы в силу 2° и $e_1^2 = E_m^2 = -1$ в силу 1°. Поэтому по лемме 1 можно выбрать α_1 и α_2 так, что, полагая

$$\alpha_1 E_m + \alpha_2 e_1 = E_m',$$

получим

$$E_m'^2 = -1, \quad (e_1 E_m')^2 = -\lambda_1'^2.$$

Далее имеем

$$(e_2 E_m' - \beta)^2 = -\lambda'^2;$$
$$e_2 E_m' - \beta = e_2 (E_m' + \beta e_2);$$

E_m', e_2, 1 независимы в силу 2° и $E_m'^2 = e_2^2 = -1$.

Поэтому по лемме 1 найдутся такие β_1 и β_2, что, полагая

$$E_m'' = \beta_1 E_m' + \beta_2 e_2,$$

найдем

$$E_m''^2 = -1, \quad (e_2 E_m'')^2 = -\lambda_2''^2.$$

Докажем, что и $(e_1 E_m'')^2 = -\lambda_1''^2$ реально:

$$e_1 E_m'' = \beta_1 e_1 E_m' + \beta_2 e_1 e_2.$$

Покажем, что $e_1 E_m'$, $e_1 e_2$, 1 независимы. Пусть мы имели бы

$$\nu_1 e_1 E_m' + \nu_2 e_1 e_2 + \nu_3 = e_1 Q + \nu_3 = 0,$$

где $Q = \nu_1 E_m' + \nu_2 e_2$. В искомой алгебре $e_1^2 = -1$; значит, $-e_1 = e_1^{-1}$; поэтому

$$e_1 (e_1 Q + \nu_3) = (e_1 e_1) Q + \nu_3 e_1 = -Q + \nu_3 e_1 = 0$$

или

$$-\nu_1 E'_m - \nu_2 e_2 + \nu_3 e_1 = 0;\quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,$$

как легко видеть из 2°. Так как

$$(e_1 E'_m)^2 = -\lambda_1'^2;\quad (e_1 e_2)^2 = -\lambda_{12}^2,$$

то в силу леммы 1

$$(e_1 E''_m)^2 = -\lambda_1''^2.$$

Теперь аналогично предыдущему подберем γ_1 и γ_2 так, что

$$E'''_m = \gamma_1 E''_m + \gamma_2 e_3,\quad E'''^2_m = -1,\quad (e_3 E'''_m)^2 = -\lambda_3'''^2,$$

и продолжим те же рассуждения. Пусть после $\nu - 1$ шагов мы получим

$$E_m^{(\nu-1)^2} = -1,\quad (e_i E_m^{(\nu-1)})^2 = -\lambda_i^{(\nu-1)^2}\quad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1), (\nu < m).$$

Тогда $E_m^{(\nu-1)}$ независимо от e_ν и 1, и в силу леммы 1 можно подобрать ρ_1 и ρ_2 так, что, полагая

$$E_m^{(\nu)} = \rho_1 E_m^{(\nu-1)} + \rho_2 e_\nu,$$

получим

$$E_m^{(\nu)^2} = -1,\quad (e_\nu E_m^{(\nu)})^2 = -\lambda_\nu^{(\nu)^2}.$$

При любом $i \leqslant \nu - 1$ имеем:

$$e_i E_m^{(\nu)} = \rho_1 e_i E_m^{(\nu-1)} + \rho_2 e_i e_\nu.$$

Наверное $i \neq \nu$, так что

$$(e_i e_\nu)^2 = -\lambda_{i\nu}^2 \quad \text{и} \quad (e_i E_m^{(\nu-1)})^2 = -\lambda_i^{(\nu-1)^2}.$$

Далее, числа $e_i E_m^{(\nu-1)}$, $e_i e_\nu$ и 1 независимы, ибо в противном случае, помножая полученное выражение их зависимости на e_i слева и учитывая, что $e_i(e_i Q) = -Q$, придем к противоречию с условием 2°.

Значит, по лемме 1

$$(e_i E_m^{(\nu)})^2 = -\lambda_i^{(\nu)^2}$$

для $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ и по выбору $E_m^{(\nu)}$ также для $i = \nu$.

Таким образом, после $m - 1$ шагов придем к $E_m^{(m-1)} = e_m$ такому, что

$$e_m^2 = -1;\quad (e_i e_m)^2 = -\sigma_{im}^2\quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1).$$

Ч. Т. Д.

5. ЛЕММА 3. *Если в условиях леммы 2 числа* $1, e_1, \ldots, e_{m-1}$ *образуют подалгебру искомой алгебры, то*

1° *Числа* $1, e_1, \ldots, e_{m-1}, 1 \cdot e_m, \ldots, e_{m-1} e_m$ *независимы.*

2° *Если* $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ *любые числа из* $2m - 1$ *написанных, то* $ab + ba = \tau_{ab}$ *реально.*

Доказательство. Невыполнение 1° привело бы к равенству $q + Qe_m = 0$, где q и Q — числа подалгебры $[1, e_1, \ldots, e_{m-1}]$, которое противоречило бы отсутствию делителей нуля в искомой алгебре. После этого 2° следует сразу из лемм 1 и 2.

6. ЛЕММА 4. *В условиях леммы 3 имеем*

$$e_i e_m = -e_m e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Доказательство. Имеем

$$(e_i e_m)^2 = -\lambda_i^2; \quad e_m^2 = -1;$$

$1, e_m, e_i e_m$ независимы в силу леммы 3. По лемме 1

$$(e_i e_m + e_m)^2 = -\mu_i^2.$$

С другой стороны,

$$(e_i e_m + e_m)^2 = -\lambda_i^2 - 1 + (e_i e_m) e_m + e_m (e_i e_m).$$

Так как $e_m^{-1} = -e_m$ и, по лемме 3, $e_i e_m = \varkappa_{im} - e_m e_i$, то

$$(e_i e_m) e_m = e_i (e_m e_m) = -e_i; \quad e_m (e_i e_m) = e_m (\varkappa_{im} - e_m e_i) = \varkappa_{im} e_m + e_i.$$

Подставляя это в предыдущее выражение, найдем:

$$-\mu_i^2 = -\lambda_i^2 - 1 - e_i + e_i + \varkappa_{im} e_m,$$

откуда

$$\varkappa_{im} = 0.$$

Ч. Т. Д.

7. ЛЕММА 5. *При любом $i \leqslant m-1$ числа $1, e_i, e_m, e_i e_m = e_{i+m}$ образуют алгебру кватернионов.*

Доказательство. Легко проверить, что эти числа образуют подалгебру, например

$$e_m (e_i e_m) = -e_m (e_m e_i) = (-e_m e_m) e_i = e_i \quad \text{и т. д.}$$

Покажем, что

$$e_{i+m}^2 = -1.$$

По лемме 2

$$e_{i+m}^2 = -\nu^2.$$

Имеем в искомой алгебре

$$e_{i+m}^{-1} = -\frac{e_{i+m}}{\nu^2}.$$

Поэтому

$$e_{i+m} (e_{i+m} e_i) = e_{i+m}^2 e_i = -\nu^2 e_i.$$

Но

$$e_{i+m}(e_{i+m}e_i) = e_{i+m}[(e_i e_m) e_i] = -e_{i+m}[(e_m e_i) e_i] =$$
$$= -e_{i+m}[e_m(e_i e_i)] = e_{i+m} e_m = -e_i.$$

Значит,

$$\nu^2 = 1; \quad e_{i+m}^2 = -1.$$

После этого легко проверить ассоциативность, например:

$$(e_i e_m) e_{i+m} = e_{i+m}^2 = -1;$$
$$e_i(e_m e_{i+m}) = -e_i(e_m(e_m e_i)) = e_i e_i = -1 \quad \text{и т. д.}$$

Также легко видеть, что

$$e_i e_{i+m} = -e_{i+m} e_i \quad \text{и т. д.}$$

Получились кватернионы.

8. Если у искомой алгебры порядок $n > 2$, то в ней существуют три независимых числа 1, e_1, E_2, где $e_1^2 = -1$. Числа 1, e_1 образуют подалгебру, а потому выполнены все условия лемм 2, 3, 4, 5. Поэтому наша алгебра будет содержать число e_2 так, что единицы 1, e_1, e_2, $e_1 e_2 = e_3$ независимы и

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1; \; e_i e_j = -e_j e_i \;\; (i \neq j); \; e_1 e_3 = -e_2 \quad \text{и т. д.,} \tag{1}$$

т. е. будет содержать подалгебру кватернионов. Если $n > 4$, то, так как единицы 1, e_1, e_2, e_3 образуют подалгебру, по леммам 2, 3, 4, 5 найдется e_4 так, что 1, e_1, e_2, e_3, $1 \cdot e_4$, $e_1 e_4, \ldots, e_3 e_4$ независимы и

$$\left.\begin{aligned} e_1^2 = \ldots = e_3^2 = e_4^2 = (e_1e_4)^2 = \ldots = (e_3e_4)^2 = -1, \\ e_i e_j = -e_j e_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Покажем, что система из этих 8 единиц есть алгебра Cayley, а именно, если q и Q числа алгебры $[1, e_1, e_2, e_3]$, то

$$(q + Qe_4)(r + Re_4) = qr - \bar{R}Q + (Rq + Q\bar{r})e_4. \tag{3}$$

9. ЛЕММА 6. *Имеем при* $i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$

$$(e_i e_j) e_4 = -e_i(e_j e_4); \quad e_4(e_i e_j) = -(e_4 e_i) e_j.$$

Доказательство. Составим линейную форму

$$\xi = x_i e_i + x_j e_j \quad (i \neq j).$$

Тогда имеем

$$\xi^2 = -x_i^2 - x_j^2,$$

откуда

$$\xi^{-1} = \frac{-\xi}{x_i^2 + x_j^2}.$$

Поэтому для искомой алгебры будем иметь при любом y

$$(x_i e_i + x_j e_j)[(x_i e_i + x_j e_j) y] = [y(x_i e_i + x_j e_j)](x_i e_i + x_j e_j) =$$
$$= -(x_i^2 + x_j^2) y.$$

Отсюда

$$e_i(e_j y) = -e_j(e_i y) \quad \text{и} \quad (ye_i)e_j = -(ye_j)e_i.$$

Полагая в первом равенстве $i=4$, $y=e_k$, $k=1,2,3$, получим

$$e_4(e_j e_k) = -e_j(e_4 e_k).$$

Пользуясь (1) и (2), найдем при $j \neq k$ (j, $k=1$, 2, 3)

$$(e_j e_k)e_4 = -e_j(e_k e_4).$$

Во втором равенстве, беря $y=e_k$, $j=4$, получим

$$(e_k e_i)e_4 = -(e_k e_4)e_i,$$

откуда

$$e_4(e_k e_i) = -(e_4 e_k)e_i.$$

Кроме того, покажем, что

$$e_i(e_j e_4) = -(e_j e_4)e_i \quad (i \neq j).$$

Имеем

$$e_i(e_j e_4) = -(e_i e_j)e_4 = (e_j e_i)e_4;$$

$$(e_j e_4)e_i = -(e_4 e_j)e_i = e_4(e_j e_i) = -(e_j e_i)e_4.$$

ч. т. д.

Поэтому получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &e_i(e_j e_4) = -(e_i e_j)e_4; \quad (e_4 e_i)e_j = -e_4(e_i e_j);\\ &e_i(e_i e_4) = (e_4 e_i)e_i = -e_4;\\ &e_i(e_j e_4) = -(e_j e_4)e_i; \quad e_4(e_i e_4) = e_i\\ &\qquad i \neq j;\ i,j = 1,2,3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

10. Присоединим к ним еще 9 равенств

$$(e_i e_4)(e_j e_4) = e_j e_i \quad (i,j = 1,2,3). \tag{5}$$

Для доказательства их положим в лемме 6

$$\xi = x_1 e_4 + x_2 e_i e_4.$$

Тогда $\xi^2 = -x_1^2 - x_2^2$ в силу (2) и (4), и получим

$$(e_i e_4)(e_4 y) = -e_4[(e_i e_4)y].$$

Положим $y=e_j$ $(j=1,2,3)$; $(j \neq i)$;

$$(e_i e_4)(e_4 e_j) = -e_4[(e_i e_4)e_j] = e_4[(e_4 e_i)e_j] =$$

$$= -e_4[e_4(e_i e_j)] = e_i e_j = -e_j e_i;$$

$$(e_i e_4)(e_4 e_j) = -(e_i e_4)(e_j e_4).$$

Откуда и имеем (5).

11. Равенств (4) и (5) вполне достаточно для проверки равенства (3). Проверим, например, что $(Qe_4)\cdot(Re_4) = -\overline{R}Q$. Имеем

$$(e_i e_4)(e_j e_4) = e_j e_i = -(-e_j)e_i,$$

$$(1\cdot e_4)(e_j e_4) = e_j = -(-e_j)\cdot 1.$$

Значит,

$$(Qe_4)(e_j e_4) = -(-e_j)Q.$$

Далее,

$$(Qe_4)(1 \cdot e_4) = -Q = (-1) \cdot Q,$$

откуда в самом деле

$$(Qe_4)(Re_4) = -\bar{R}Q.$$

Аналогично находим, что

$$(Qe_4)\, r = (Q\bar{r})\, e_4 \quad \text{и} \quad q\,(Re_4) = (Rq)\, e_4.$$

Таким образом, указанная система есть алгебра Cayley. Обозначая ее 8 единиц $1, e_1, \ldots, e_7$, получим в частности

$$\left.\begin{array}{l} e_i^2 = -1,\ e_i e_j = e_j e_i \quad (i = j;\ i, j = 1, 2, \ldots, 7); \\ A\,(B\bar{B}) = (AB)\,\bar{B} = \bar{B}\,(BA); \quad B\bar{B} = N(B). \end{array}\right\} \qquad (6)$$

12. Пусть искомая алгебра содержит еще девятую независимую единицу. Основываясь на леммах 2, 3, 4, 5 и равенствах (6), увидим, что существует e_8 такое, что

$$e_8^2 = -1; \quad e_i e_8 = -e_8 e_i, \quad (e_i e_8)^2 = -1.$$

Заменяя в лемме 6 e_4 на e_8 и вместо 1, 2, 3 беря 1, 2, 3, ..., 7, получим, учитывая (6), систему равенств, полностью аналогичных (4) и (5) и определяющих 16-единичную алгебру

$$(q + Qe_8)(r + Re_8) = qr - \bar{R}Q + (RQ + Q\bar{r})\, e_8, \qquad (7)$$

построенную из чисел Cayley q, Q, r, R точно так же, как они построены из кватернионов, и последние из комплексных чисел.

13. Теперь докажем теорему, сформулированную в § 2. Выберем A и B в подалгебре (7), полагая

$$A = q + Qe_8,\ B = r + Re_8,\ \bar{B} = \bar{r} - Re_8 = B^{-1} \cdot N(B).$$

Тогда $(AB)\,\bar{B}$ должно равняться

$$A \cdot N(B) = q\,(r\bar{r} + R\bar{R}) + Re_8 \cdot (r\bar{r} + R\bar{R}).$$

Сравним части, свободные от e_8. Должны иметь

$$(qr - \bar{R}Q)\,\bar{r} + \bar{R}\,(Rq + Q\bar{r}) = q\,(r\bar{r} + R\bar{R}).$$

Но в виду (6)

$$(qr)\,\bar{r} = q\,(r\bar{r}); \quad \bar{R}\,(Rq) = (R\bar{R})\, q.$$

Значит, получим

$$q\,(r\bar{r}) - (\bar{R}Q)\,\bar{r} + (R\bar{R})\, q + \bar{R}\,(Q\bar{r}) = q\,(r\bar{r}) + q\,(R\bar{R}).$$

Откуда

$$(\bar{R}Q)\,\bar{r} = \bar{R}\,(Q\bar{r}),$$

что невозможно, так как $\bar{R}$, Q, $\bar{r}$ могут быть любыми числами Cayley, а алгебра Cayley неассоциативна. Значит, $n \leqslant 8$.

Ч. Т. Д.

14. Так как ассоциативные алгебры без делителей нуля наверное ранга 2, то теорема Frobenius'а есть частное следствие этой теоремы.

15. Докажем теперь теорему Hurwitz'а методом неассоциативных алгебр.

ТЕОРЕМА. *Обозначая*

$$N(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2; \quad N(X) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2,$$

можно утверждать, что тождество

$$N(A)N(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{j,k=0}^{n-1} \alpha_{ijk} a_j x_k \Big)^2, \tag{8}$$

где α_{ijk}*—реальные постоянные, возможно только при* $n = 1, 2, 4, 8$.

Доказательство. Речь идет о существовании матрицы:

$$L = \left\| \begin{matrix} l_{00} & l_{01} & \dots l_{0,n-1} \\ l_{10} & l_{11} & \dots l_{1,n-1} \\ \\ l_{n-1,0} & l_{n-1,1} & \dots l_{n-1,n-1} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$l_{ik} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ijk} a_j,$$

$$L'L = LL' = N(A)E.$$

Кроме того, если какую-либо ее колонну, хотя бы

$$\begin{matrix} l_{0i} \\ l_{1i} \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{n-1,i} \end{matrix}$$

написать в виде матрицы от коэффициентов α_{ijk}, то она будет тоже ортогональна. Предположим, что

$$L = L_1 + l_{00}E,$$

где $L_1 = -L_1'$, т. е. L_1 антисимметрическая, и что L_1 не зависит от a_0. Это предположение оправдаем в конце рассуждения. Положим теперь:

$$l_{00} = a_0'; \; l_{i0} = -l_{0i} = -a_i' \quad (i \neq 0).$$

В виду сказанного выше, полученные n уравнений можно разрешить относительно $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и вставить их решение в минорную матрицу, обведенную пунктиром. Весьма важно, что, как очевидно из указанных условий, элементы ее, стоящие вне главной диагонали, не будут зависеть от a_0, а на диагонали будет стоять a_0. Опуская штрихи у $a'_0, \ldots, a'_{n-1}$, введем матрицы

$$M = \begin{Vmatrix} a_0, & -a_1, & \ldots & -a_{n-1} \\ a_1, & a_0, & l_{12}, \ldots & l_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}, & l_{n-1,1}, & \ldots & a_0 \end{Vmatrix}; \quad \Xi = \begin{Vmatrix} a_0x_0, & -a_1x_1, \ldots & -a_{n-1}x_{n-1} \\ a_1x_0, & a_0x_1, \ldots & l_{1,n-1}x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}x_0, & \ldots\ldots & a_0x_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Определим теперь алгебру на базисе $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ символическим равенством

$$(a_0 + a_1e_1 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1})(x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_{n-1}e_{n-1}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e_1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & & e_{n-1} \end{Vmatrix} \cdot \Xi$$

в том смысле, что 0-ая, 1-ая, ..., $(n-1)$-ая строки полученной матрицы означают соответствующие компоненты произведения. Отсюда легко видеть, что

$$1 \cdot e_i = e_i \cdot 1 = e_i; \; e_i^2 = -1 \quad (i = 1, \ldots, n-1)^*.$$

Докажем, что полученная алгебра имеет ранг 2. Покажем сперва, что

$$e_ie_j = -e_je_i \quad (i \neq j).$$

Для этого, обозначая $\Xi_i(a, x)$ сумму элементов i-той строки матрицы Ξ, получим

$$N(A)N(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \Xi_i^2(a, x).$$

Положим, в частности, $a_0 = x_0$; $a_1 = -x_1$; ..., $a_{n-1} = -x_{n-1}$. Тогда получим

$$[N(X)]^2 = [N(X)]^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \Xi_i^2(x, x).$$

Откуда

$$\Xi_i(x, x) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

---

* Последнее явствует также из $\Xi_i(x, x) = 0$.

Отсюда без труда выводим такой факт: если в m-той строке матрицы Ξ член l_{mj} содержит переменную a_i, то в ней же член l_{mi} будет содержать переменную a_j с коэффициентом, по абсолютной величине равным, а по знаку противоположным. Это отвечает факту: если произведение $a_i x_j e_i e_j$ содержит член $a_i x_j \alpha e_m$, то $a_j x_i e_j e_i$ содержит член $a_j x_i \cdot -\alpha e_m$, т. е. $e_i e_j = -e_j e_i$, ибо, как видим из выражения Ξ,

$$\text{real part } (e_i e_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Следовательно, наша алгебра ранга 2; именно, полагая

$$x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}; \; \bar{x} = x_0 - x_1 e_1 - \dots - x_{n-1} e_{n-1},$$

найдем

$$x\bar{x} = \bar{x}x = N(x) \quad \text{и} \quad x^2 - (x + \bar{x})x + N(x) = 0$$

тождественно или $x^2 - 2x_0 x + N(x) = 0$.

Далее, здесь

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{N(x)}.$$

Покажем, что здесь $(ab)b^{-1} = b^{-1}(ba) = a$ или, что одно и то же, $(ab)\bar{b} = \bar{b}(ba) = a \cdot N(b)$. Тогда по обобщенной теореме Frobenius'a эта алгебра—алгебра Cayley или ее подалгебра, что достаточно для доказательства.

Заметим сперва, что в этой алгебре, как легко видеть,

$$(\overline{AB}) = \bar{B} \cdot \bar{A}.$$

Теперь решим в этой алгебре уравнение

$$AX = Y.$$

Имеем ряд линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_{ik} x_k = y_i.$$

Учитывая то, что

$$M'M = N(A)E; \; l_{ij} = a_0; \; l_{0j} = -a_j \quad (j \neq 0),$$

найдем

$$x_j = \frac{y_0 l_{0j} + y_1 l_{1j} + \dots + y_{n-1} l_{n-1,j}}{N(A)}.$$

С другой стороны, вычислим выражение $\bar{A} \cdot Y$. Найдем его j-тый компонент. Очевидно, он равен

$$y_0(-a_j) - l_{j1} y_1 - \dots - l_{j,j-1} y_{j-1} + a_0 y_j - l_{j,j+1} y_{j+1} - \dots - l_{j,n-1} y_{n-1}.$$

При этом учтено, что элементы вне диагонали не зависят от a_0 и при $j = 0$ надо брать $y_0 \cdot (+a_0)$. В виду равенств $l_{ik} = -l_{ki}$ $(i \neq k)$ это равно

$$y_0 l_{0j} + y_1 l_{1j} + \dots + y_j l_{jj} + \dots + y_{n-1} l_{n-1,j},$$

т. е. равно числителю x_j. Значит, решением уравнения $AX = Y$ явится

$$X = \frac{\bar{A} \cdot Y}{N(A)}.$$

Но $Y = \frac{(A\bar{A})}{N(A)} \cdot Y$. Значит,

$$\frac{1}{N(A)} A(\bar{A}Y) = \frac{1}{N(A)} (A\bar{A})Y \quad \text{или} \quad A(\bar{A}Y) = (A\bar{A})Y.$$

Беря сопряженные, найдем

$$(\overline{\bar{A}Y})\bar{A} = (\bar{Y}A)\bar{A} = \bar{Y}(A\bar{A})$$

и, вообще,

$$(YA)\bar{A} = Y(A\bar{A}).$$

Значит, это алгебра Cayley или ее подалгебра, т. е. $n = 1, 2, 4, 8$.

16. Осталось оправдать выбор L в форме

$$L = L_1 + l_{00}E,$$

где $L_1 = -L'_1$ и L_1 не зависит от a_0. Это достигается известным способом (²). Имеем

$$L = L_0 a_0 + L_1 a_1 + \dots + L_{n-1} a_{n-1},$$

где L_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ матрицы коэффициентов α_{ijk}. Из $LL' = N(A)E$ найдем $L_0 L'_0 = E$. Полагая теперь $M_i = L_i L'_0$, находим равенство:

$$(a_0 E + a_1 M_1 + \dots + a_{n-1} M_{n-1})(a_0 E + a_1 M'_1 + \dots + a_{n-1} M'_{n-1}) = N(A)E,$$

откуда усматриваем, что M_i антисимметрические. Полагая $a_1 M_1 + \dots + a_{n-1} M_{n-1} = L_1$, найдем $L = L_1 + a_0 E$, где L_1 антисимметрическая и не зависит от a_0. Этим все и доказано.

Ленинградский гос. университет.

Поступило 19.XI.1937.

ЛИТЕРАТУРА

1 Dickson L. E., Algebras and their arithmetics, Chicago 1923.
2 Hurwitz A., Nachrichten v. d. Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1898.
3 Dickson L. E., Linear algebras, Cambridge 1914.

U. LINNIK. GENERALIZATION OF FROBENIUS THEOREM AND ITS CONNECTION WITH HURWITZ'S THEOREM ON COMPOSITION OF QUADRATIC FORMS

SUMMARY

In the present paper a generalization of the theorem, due to Frobenius, about the unique place of quaternion algebra among all linear algebras with finite basis is given and its connection with the impossibility of composition of quadratic forms with more than eight variables is established. The latter proved by Hurwitz in using matrices, is now demonstrated by means of Cayley's eight-units algebra and is seen to be a simple consequence of non-associative character of this algebra. The proved theorem may be expressed as follows:

Among all second rank algebras with finite or infinite basis, the only algebras in which the identities $(ab)\,b^{-1} = b^{-1}\,(ba) = a$ *are not meaningless and take place for all* a *and* $b \neq 0$ *are Cayley's algebra and its sub-algebras.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

О РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

В статье рассматриваются в общей постановке некоторые задачи Чебышевского типа. В основу кладется геометрическая теорема Helly о пересечении выпуклых тел в n-мерном пространстве.

В настоящей статье рассматриваются в общей постановке некоторые задачи Чебышевского типа.

Пусть x точка абстрактного пространства R, M некоторое множество точек в этом пространстве, $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ функция n вещественных параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и точки x, принимающая вещественные значения.

Наименьшим уклонением от нуля функции $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M будем называть, как обычно, нижнюю грань при различных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ максимумов $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполняются условия:*

a) $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ ограничена на множестве M при некоторой системе значений параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и непрерывна относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, равномерно относительно x;

b) неравенство $|F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)| < k$ определяет при любом фиксированном x и положительном k выпуклую область в n-мерном пространстве параметров $c_1, \ldots, c_n$;

c) пересечение тел $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ при какой-нибудь системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_l$ есть ограниченное тело,

то имеет место заключение:

Наименьшее уклонение от нуля $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M равно верхней грани наименьших уклонений $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ на всех системах, состоящих из $n+1$ точек, взятых из M.

Доказательство. Рассмотрим совокупность точек в пространстве параметров $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|F(c_1, \ldots, c_n, x_i)| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

При достаточно большом k эта система неравенств имеет решения (из условия a). Определим нижнюю грань k_0 таких значений k,

для которых написанная система неравенств имеет решения для любой системы из $n+1$ точек $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Рассмотрим совокупность тел, определенных неравенствами

$$|F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon,$$

где x пробегает все точки множества M. Все эти тела (при любом x) по условию b) выпуклы. Пересечение каждых $n+1$ из числа этих выпуклых тел не пусто и пересечение конечного числа каких-нибудь из них — ограниченное тело [условие c)]. Согласно геометрической теореме Helly, если совокупность выпуклых тел в n-мерном пространстве такова, что любые $n+1$ из них имеют общую точку, причем пересечение какого-нибудь конечного числа из них ограничено, то и все тела совокупности имеют общую точку.

Поэтому в нашем случае существует система значений $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n$, удовлетворяющая сразу всем неравенствам

$$|F(c_1, \ldots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon,$$

каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из определения k_0 следует, что неравенства

$$|F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)| \leqslant k - \varepsilon$$

были бы несовместны, если придать x уже соответственно подобранные $n+1$ значений из M; тем более они несовместны при любых x, принадлежащих M.

Таким образом, k_0 есть нижняя грань значений k, для которых система неравенств $|F(c_1, \ldots, c_n, x)| \leqslant k$ совместна при любых x из M.

Так как пересечение каких-нибудь l тел $|F(c_1, \ldots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon$ есть ограниченное тело и функция $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ непрерывна по отношению к $c_1, \ldots, c_n$, равномерно относительно x, то можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить функцию

$$F(c_1^0, \ldots, c_n^0, x),$$

для которой выполнены неравенства

$$|F(c_1^0, \ldots, c_n^0, x)| \leqslant k_0 \quad \text{при любом } x \subset M.$$

Примечание. Отбрасывая условие b), легко построить пример функции $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$, для которой наименьшее уклонение на M не совпадает с верхней гранью наименьших уклонений на системах из $n+1$ точек, и даже на системах из любого конечного числа точек.

С другой стороны, условие b) не необходимо и его можно было бы заменить другими предположениями, связанными с обобщением теоремы Helly.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим частный случай, когда* $F(c_1, \ldots, c_n, x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$ и M *состоит из* $n+1$ *точек* $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Предположим, что все определители матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right\|$$

n-ого порядка отличны от нуля. В таком случае

1° *существует одна и только одна система значений* $c_1^0, \ldots, c_n^0$, *для которой осуществляется наименьшее уклонение;*

2° *все разности* $h_k = \sum_{i=1}^{h} c_i^0\varphi_i(x_k) - f(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ *равны между собой по абсолютной величине;*

3° *все произведения* $(-1)^k \Delta_k h_k$ *имеют одинаковые знаки.*

Через Δ_k *обозначен определитель*

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{k-1}) & \varphi_2(x_{k-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{k-1}) \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \varphi_2(x_{k+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{k+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right|$$

Доказательство. Рассмотрим систему из $n+1$ уравнений

$$\begin{matrix} c_1\varphi_1(x_1) & + \ldots + c_n\varphi_n(x_1) & = f(x_1) + h_1 \\ c_1\varphi_1(x_2) & + \ldots + c_n\varphi_n(x_2) & = f(x_2) + h_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ c_1\varphi_1(x_{n+1}) & + \ldots + c_n\varphi_n(x_{n+1}) & = f(x_{n+1}) + h_{n+1} \end{matrix}$$

Пусть c_i подобраны так, что наибольшее из h_i имеет наименьшее значение. Если бы при этом не все h_i были равны по абсолютной величине, например, h_{n+1} меньше максимума остальных, то можно было бы придать первым n из них достаточно малые приращения, уменьшающие их абсолютную величину, и, пользуясь неравенством нулю определителя при c_i, изменить c_i так, чтобы уменьшить максимальные из h_j. Поэтому h_j равны между собою по абсолютной величине:

$$h_j = \pm h.$$

Для определения знаков h_j составим выражения для приращения Δh_j через Δc_i

$$\begin{aligned}
\Delta h_1 &= \Delta c_1\varphi_1(x_1) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_1)\\
\Delta h_2 &= \Delta c_1\varphi_1(x_2) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_2)\\
&\ldots\\
\Delta h_{n+1} &= \Delta c_1\varphi_1(x_{n+1}) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Между Δh_j существует одно и только одно соотношение:

$$\begin{vmatrix}
\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\,\Delta h_1\\
\varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2)\,\Delta h_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1})\,\Delta h_{n+1}
\end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\Delta_i\Delta h_i = 0.$

Из невозможности уменьшить абсолютные величины h_j следует, что нельзя подобрать решений Δh_j этого уравнения, противоположных по знакам h_j. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^i\Delta_i h_i$ имели одинаковые знаки.

Таким образом, можем положить

$$h_i = (-1)^{i+1}\operatorname{sign}\Delta_i\cdot h,$$

где h может быть и положительным и отрицательным.

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&c_1\varphi_1(x_1) + c_2\varphi_2(x_1) + \ldots + c_n\varphi_n(x_1) - \operatorname{sign}\Delta_1 h = f(x_1)\\
&c_1\varphi_1(x_2) + c_2\varphi_2(x_2) + \ldots + c_n\varphi_n(x_2) + \operatorname{sign}\Delta_2 h = f(x_2)\\
&\ldots\\
&c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \ldots + c_n\varphi_n(x_i) + (-1)^i\operatorname{sign}\Delta_i h = f(x_i)\\
&\ldots\\
&c_1\varphi_1(x_{n+1}) + c_2\varphi_2(x_{n+1}) + \ldots + c_n\varphi_n(x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\operatorname{sign}\Delta_{n+1} h = f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Отсюда

$$h = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\Delta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+1}|\Delta_i|}.$$

З а м е ч а н и е. Какова бы ни была система из $n+1$ точек, всегда можно подобрать функцию $f(x)$, обладающую тем свойством, что наилучшее приближение $f(x)$ на M с помощью линейной комбинации $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ совпадает с наилучшим приближением $f(x)$ на данных произвольно $n+1$ точках из M.

Пусть ранг матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix}\right\|$$

равен k $(k \leqslant n)$.

Все $\varphi_l(x_i)$ $(l > k)$ выражаются линейно через $\varphi_t(x_i)$ $(t = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k)$, т. е.

$$\varphi_l(x_i) = \sum_{t=1}^{k} c_{lt}\varphi_t(x_i)$$

$$(l = k+1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, n+1).$$

Поэтому наилучшее приближение с помощью $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ для системы точек $x_1, \ldots, x_{n+1}$ совпадает с наилучшим приближением с помощью функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$.

Пусть какой-нибудь минор k-го порядка, например

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_k(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_k) & \ldots & \varphi_k(x_k) \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Прибавим к точкам $x_1, \ldots, x_k$ еще одну точку, например x_{k+1}, и определим функцию $f(x)$ так: в точке x_i положим ее равной $\operatorname{sign}\delta_i$, где

$$\delta_i = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \ldots & \varphi_k(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_k(x_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \ldots & \varphi_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}$$

Не все подобные определители равны нулю. Во всех точках множества M за исключением $x_1, \ldots, x_{k+1}$ положим $|f(x)| < 1$. Наилучшее приближение этой функции с помощью $L(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots$ $\ldots + c_k\varphi_k(x)$ (а значит, и $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$) не может быть меньше 1. В противном случае знаки $L(x_i)$ должны были бы быть противоположны знакам $f(x_i)$, т. е. совпадать с $-\operatorname{sign}\delta_i$. Но это противоречит очевидному соотношению $\sum \delta_i L_i = 0$ при $x = x_1, \ldots, x_k$.

Заметим, что функцию $f(x)$ можно было бы подчинить дополнительному соотношению

$$|f(x)| < 1 - A(x),$$

где $A(x)$ — любая функция, обращающаяся в нуль в точках $x_1, \ldots, x_{k+1}$ и меньшая 1 всюду на M.

ТЕОРЕМА 3. 1° *Наименьшее уклонение линейной комбинации*

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x) \text{ от } f(x)$$

на множестве M *совпадает с наименьшим уклонением этой комбинации от* $f(x)$ *на некоторой системе из* $n+1$ *точек из* M, *если определитель*

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}$$

не тождественно равен нулю, все $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *ограничены на* M. *Это наименьшее уклонение фактически достигается для некоторых*

$$\overset{0}{c}_1, \ldots, \overset{0}{c}_n.$$

2° *Если* M *компактно и на* M^n *существует всюду плотное множество систем* $x_1, \ldots, x_n$, *для которых предыдущий определитель отличен от нуля,* $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *непрерывные функции, то наименьшее уклонение на* M *есть максимум выражения*

$$\frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) & f(x_1)\\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) & f(x_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) & f(x_{n+1})\end{vmatrix}}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left\|\begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i-1})\\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i+1})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1})\end{matrix}\right\|}$$

при различных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, *взятых из* M.

Доказательство. 1° вытекает из теоремы 1, если принять во внимание, что в случае нетождественного обращения в нуль определителя Δ, объем пересечения выпуклых тел, рассмотренных в теореме 1, конечен, а линейная комбинация c_i с ограниченными коэффициентами непрерывна относительно c_i равномерно относительно x. 2° следует из теоремы 2, если учесть непрерывность $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, $f(x)$ и компактность M.

Из приведенных теорем можно вывести необходимое и достаточное условие Haar'а для единственности линейной комбинации $c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$, дающей наименьшее отклонение от $f(x)$ на компактном множестве M. Это условие заключается в необращении в нуль определителя Δ ни для какой системы точек $x_1, \ldots, x_n$, взятых из M.

Пусть Δ нигде не обращается в нуль. Выберем на основании теоремы 1 систему из $n+1$ точек $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$, наилучшее приближение для которой совпадает с наилучшим приближением на M. Но для такой системы при необращении в нуль Δ из теоремы 2 следует единственность линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$, дающей наилучшее приближение.

Для доказательства обратного допустим, что для системы точек $x_1', \ldots, x_n'$ определитель Δ равен нулю. Существует линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i\varphi_i(x)$, обращающаяся в нуль при $x = x_1, \ldots, x_n$. Умножив ее на достаточно малое постоянное число, можем сделать ее всюду на M меньшей 1 по абсолютной величине. Отождествим эту линейную комбинацию с функцией $A(x)$ из замечания к теореме 2. Тогда построенная там функция $f(x)$ имеет наилучшее приближение на M с помощью $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, равное 1. Оно осуществляется, с одной стороны, линейной комбинацией $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$, где все c_i равны нулю, а с другой стороны, системой значений $c_i = \rho_i$, где ρ_i не все равны нулю, что и доказывает неоднозначность решения Чебышевской задачи, если Δ для какой-нибудь системы $x_1', \ldots, x_n'$ обращается в нуль.

Из доказанных общих теорем можно получить как частный случай теоремы о равномерных приближениях функций в n-мерных эвклидовых пространствах и о равномерных приближениях функционалов.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
7.XII.1937.

L. SCHNIRELMANN. SUR LES APPROXIMATIONS UNIFORMES

RÉSUMÉ

Dans la note presente nous considérons quelques problèmes du type de Tchebycheff au point de vue général. Nos considérations sont basées sur le théorème géometrique de Helly.

Soit x un point quelconque de l'espace abstrait R, M un ensemble dans cet espace, $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ une fonction de n paramètres réels et du point x. L'écart minimum de 0 de la fonction F sur l'ensemble M est la borne inférieure de maximum de F sur M pour toutes les valeurs de $c_1, \ldots, c_n$.

THÉORÈME 1. *Si les conditions suivantes ont lieu*

a) $F(c_1, \ldots, x)$ *est bornée sur* M *au moins pour un système de* $c_1, \ldots, c_n$ *et continue par rapport à* $c_1, \ldots, c_n$, *également pour tous les* x;

b) *il existe un tel système de valeurs de* $x - x_1, \ldots, x_l$ *que l'intersection des corps ci-dessus est un corps fini,—*

l'écart minimum de F *sur* M *est égal à la borne supérieure des écarts minima de* F *sur tous les systèmes qui consistent de* $n + 1$ *points de* M.

Considérons le cas particulier, où

$$F = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$$

et M consiste de $n + 1$ points $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Désignons par Δ_k les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{k-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{k-1}) \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \ldots, n + 1).$$

THÉORÈME 2. *Si tous les* Δ_k *sont différents de* 0

1) *il existe toujours seulement un système* $c_1^0, \ldots; c_n^0$ *pour lequel l'écart minimum est atteint;*

2) *toutes les différences* $h_k = \sum c_i^0\varphi_i(x_k) - f(x_k)$ $(k = 1, \ldots, n + 1)$ *ont la même valeur absolue;*

3) *les produits* $(-1)^k \Delta_k h_k$ *ont le même signe.*

THÉORÈME 3. *Si* M *est compact,* $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *sont continues sur* M *et*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est différent de 0 *sur un ensemble des systèmes* $x_1, \ldots, x_n$ *dense partout sur* M^n, *l'écart minimum de l'expression* $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ *de* $f(x)$ *sur* M *coïncide avec le maximum de*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \Delta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+1} |\Delta_i|}$$

pour les divers systèmes des points $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *de* M.

Des théorèmes enoncés decoule la condition de Haar pour l'unicité d'expression $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$ qui réalise l'écart minimum de $f(x)$ sur l'ensemble compact M.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

С. Л. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ЧАСТЬ II

В статье рассматриваются интегродифференциальные уравнения, у которых первый индекс регулярности ρ_1 положителен, а второй индекс ρ_2 обращается в нуль. При некоторых специальных предположениях относительно ядер доказывается существование решения и дается правило для его нахождения. Решение оказывается единственным. Кроме того, на частных примерах доказывается неразрешимость (вообще говоря) уравнений с первым индексом ρ_1, равным нулю, или уравнений со вторым индексом ρ_2 отрицательным.

1. Введение

В первой части настоящего исследования * были рассмотрены интегродифференциальные уравнения, в которых областью интегрирования служил конус с вершиной в переменной точке пространства. Нами было доказано, что при некоторых ограничивающих предположениях относительно вида ядер такого уравнения, оно может быть решено по методу последовательных приближений. В основном результат исследования сводился к следующему.

Если в уравнении

$$u = f + \mathfrak{L}u \tag{1}$$

$\mathfrak{L}$ — регулярная операция, и если индексы ее регулярности ρ_1 и ρ_2 оба положительны, то при некоторых ограничениях на свободный член уравнения, касающихся возможности несколько раз применить к функции f операцию $\mathfrak{L}$, уравнение (1) разрешимо по способу последовательных приближений.

В настоящей части мы рассмотрим уравнения, в которых $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 = 0$, отказавшись от условия положительности второго индекса. Кроме того, мы построим два примера, показывающих, что уравнения, в которых $\rho_1 = 0$, могут оказаться неразрешимыми даже при $\rho_2 = +\infty$, и что уравнения, где $\rho_2 < 0$, могут оказаться неразрешимыми даже при $\rho_1 = \infty$.

* См. Известия Ак. Наук СССР, Матем. серия, 1937, № 4.

Таким образом случай, разобранный нами, является самым общим, если не делать каких-либо новых специальных предположений о структуре рассматриваемых уравнений.

2. Анализ уравнений для $\rho_2 = 0$

Рассмотрим, какие возможности могут представиться при изучении регулярных операций $\mathfrak{L}$ с индексом $\rho_2 = 0$.

Предположим с самого начала, что все изучаемые нами операции, пока об этом не оговорено специально, применяются лишь к функциям, обращающимся в нуль при $t^{(0)} = 0$ вместе с достаточным количеством производных. Пусть, кроме того, число переменных $n \geqslant 2$, ибо для $n = 1$ все результаты становятся тривиальными. Рассмотрим сначала нечетное n.

При этих оговорках любая операция $\mathfrak{L}$ может быть заменена другой эквивалентной, у которой наименьший из показателей ядер $\mu = 0$, а наивысший порядок производных, входящих в $\mathfrak{L}$, будет $\frac{n+1}{2}$.

В самом деле, как доказано в первой части, в таких уравнениях бывает возможно интегрированием по частям понижать порядок входящих туда производных, понижая одновременно показатели ядра так, чтобы индексы оставались неизменными.

Такое понижение можно производить до того момента, пока показатели получаемого ядра удовлетворяют неравенствам

$$\mu > -1 \text{ и } \lambda > -n. \qquad (2)$$

Так как

$$\mu \geqslant \rho_2 + l - \frac{n+1}{2}$$

и

$$\lambda \geqslant \rho_1 + l + n + 1,$$

где l — порядок производной, на которую умножается данное ядро, то для выполнения этих неравенств достаточно, чтобы

$$l > \frac{n-1}{2} - \rho_2 \qquad (l > -\rho_1 + 1). \qquad (3)$$

При нечетных n существенным является лишь первое из неравенств (3), так как второе для $n > 2$ автоматически следует из первого.

Наше утверждение доказано.

В случае, когда n четное, понижением порядка производных можно всегда добиться того, чтобы $\mu = \frac{1}{2}$, а наивысший порядок производной был $\frac{n}{2} + 1$.

В самом деле, при рассмотрении этой задачи мы можем сразу предположить, что производные порядка $\frac{n}{2}$ с ядром, у которого

$\mu = -\frac{1}{2}$, отсутствуют. Если это не так, то такие члены исчезнут после первой же итерации.

Более высокий порядок производных, чем $\frac{n}{2}+1$, исключается с помощью интегрирования по частям, причем неравенства (3) гарантируют возможность снижения этого порядка даже до $\frac{n}{2}$.

3. Анализ композиции двух интегродифференциальных операций для нечетного n

Пусть n нечетное, $n = 2s - 1$. Как и в первой части, мы займемся прежде всего некоторыми исследованиями, касающимися композиции интегродифференциальных операций. С этой целью изучим более подробно интеграл

$$K^{(01)}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)}) =$$

$$= \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}}}{\partial t^{(1)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(1)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(1)^{\alpha_n}}} \overbrace{\int \ldots \int}^{n+1}_{t^{(1)}+r^{(21)} \leqslant t^{(2)} \leqslant t^{(0)}-r^{(01)}} K^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(2)}, t^{(2)}) \times$$

$$\times K^{(21)}(M^{(2)}, t^{(2)}; M^{(1)}, t^{(1)})\, dM^{(2)}\, dt^{(2)}, \tag{4}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ любые числа такие, что $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \frac{n+1}{2} = s$, при некоторых новых специальных предположениях относительно ядер K.

Пусть ядро $K^{(02)}$ допускает представление

$$K^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(2)}, t^{(2)}) =$$

$$= \overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)})\, \psi(\eta^{(02)}) +$$

$$+ \overline{\overline{K}}{}_2^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \eta^{(02)}, \xi_0^{(02)}), \tag{5}$$

где $\psi(\eta)$ обозначает функцию от η, определенную равенствами:

$$\psi(\eta) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \dfrac{\eta - \frac{1}{2}}{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - \eta\right)} & \frac{1}{3} \leqslant \eta \leqslant \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} < \eta < 1 \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что в промежутке $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ функция $\psi(\eta)$ непрерывна вместе со всеми своими производными.

На ядро $\overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)})$ мы наложим требование, чтобы некоторое количество его производных в общей точке

(где ни одно ϑ не близко ни к нулю, ни к π) удовлетворяло неравенствам:

$$\left|\frac{\partial^m \overline{\overline{K}}_1^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}, \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)})}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(0)\alpha_n} \partial \vartheta_1^{(01)\beta_1} \partial \vartheta_2^{(01)\beta_2} \ldots \partial \varphi^{(01)\beta_{n-1}} \partial \xi_0^{(01)\beta_0}}\right| \leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}}, \quad (7)$$

где $0 < \alpha < 1$.

Это требование мы будем считать инвариантным для всевозможных поворотов координатных осей с тем, чтобы исключить несимметричность при их выборе. Число нужных производных мы не фиксируем.

На ядро $\overline{\overline{K}}_2^{(02)}$ мы наложим требование при $\eta \geqslant \frac{1}{3}$

$$\left|\frac{\partial^m \overline{\overline{K}}_2^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; \vartheta_1^{(01)} \ldots \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \eta^{(02)}, \xi^{(02)})}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(0)\alpha_n} \partial \vartheta_1^{(02)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(02)\beta_{n-1}} \partial \eta^{(02)\beta_n} \partial \xi_0^{(02)\beta_0}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}} \left(1 - \eta^{(02)}\right)^{\alpha - \beta_n} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (8)$$

При $\eta \leqslant \frac{2}{3}$ мы будем записывать условие, накладываемое на K, в виде *

$$\left|\frac{\partial^m \overline{K}_2^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; \eta_1^{(02)}, \eta_2^{(02)}, \ldots, \eta_n^{(02)}, \xi_0^{(02)})}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(0)\alpha_n} \partial \xi_0^{(02)\beta_0} \partial \eta_1^{(02)\beta_1} \ldots \partial \eta^{(02)\beta_n}}\right| \leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}} \quad (9)$$

Как (8), так и (9) должны быть справедливы для некоторого конечного числа производных, которое мы ближе не фиксируем. Полезно заметить, что одновременно с разложением (5) всегда имеет место разложение

$$K(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(2)}, t^{(2)}) =$$
$$= \tilde{\tilde{K}}_1(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) \psi(\eta^{(02)}) +$$
$$+ \tilde{\tilde{K}}_2^{(02)}(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \eta^{(02)}, \xi_0^{(02)}), \quad (10)$$

где $\tilde{\tilde{K}}_1^{(02)}$ и $\tilde{\tilde{K}}_2^{(02)}$ подчинены условиям:

$$\left|\frac{\partial^m \tilde{\tilde{K}}_1(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)})}{\partial t^{(2)\alpha_0} \partial x_1^{(2)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(2)\alpha_n} \partial \vartheta_1^{(02)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(02)\beta_{n-1}} \partial \xi_0^{(02)\beta_0}}\right| \leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}}, \quad (11)$$

$$\left|\frac{\partial^m \tilde{\tilde{K}}_2(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \eta^{(02)}, \xi_0^{(02)})}{\partial t^{(2)\alpha_0} \partial x_1^{(2)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(2)\alpha_n} \partial \xi_0^{(02)\beta_0} \partial \vartheta_1^{(02)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(02)\beta_{n-1}} \partial \eta^{(02)\beta_n}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}} \left(1 - \eta^{(02)}\right)^{\alpha - \beta_n} \quad \text{при } \eta^{(02)} \geqslant \frac{1}{3} \quad (12)$$

и

* Обозначения здесь несколько отличны от обозначений 1-й части: $\overline{K}$ обозначает функцию аргументов $M^{(0)}$, $t^{(0)}$, $\eta_1^{(02)}$, ..., $\eta_n^{(02)}$, $\xi^{(02)}$ и соответственно $\tilde{K}$ функцию $M^{(2)}$, $t^{(2)}$, $\eta^{(02)}$, ..., $\xi^{(02)}$.

$$\left| \frac{\partial^m \tilde{K}_2(M^{(2)}, t^{(2)}; \xi_0^{(02)}, \eta_1^{(02)}, \ldots, \eta_n^{(02)})}{\partial t^{(2)\alpha_0} \partial x_1^{(2)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(2)\alpha_n} \partial \xi_0^{(02)\beta_0} \partial \eta_1^{(02)\beta_1} \ldots \partial \eta_n^{(02)\beta_n}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \xi_0^{(02)^{\alpha - s - \beta_0}} \quad \text{при } \eta^{(02)} \leqslant \frac{2}{3}. \tag{13}$$

Для доказательства этого предложения покажем, что за функцию $\tilde{\tilde{K}}_1^{(02)}$ может быть выбрана функция

$$\tilde{\tilde{K}}_1^{(02)}(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) =$$
$$= \overline{K}_1^{(02)}(x_1^{(2)} + \xi_0^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, x_2^{(2)} + \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \cos \vartheta_2^{(02)}, \ldots, x_n^{(2)} +$$
$$+ \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \ldots \sin \varphi^{(02)}; t^{(2)} + \xi_0^{(02)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}). \tag{14}$$

Справедливость неравенства (11) при этом очевидна.

Нам остается проверить, что

$$\tilde{\tilde{K}}_2(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \eta^{(02)}, \xi_0^{(02)}) =$$
$$= K^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(2)}, t^{(2)}) -$$
$$- \psi(\eta^{(02)}) \tilde{\tilde{K}}_1^{(02)}(M^{(2)}, t^{(2)}; \vartheta_1^{(02)}, \vartheta_2^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) \tag{15}$$

удовлетворяет (12) и (13).

Для $\tilde{\tilde{K}}_2^{(02)}$ мы получим представление:

$$\tilde{\tilde{K}}_2^{(02)} = \overline{\overline{K}}_2^{(02)}(x_1^{(2)} + \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, x_2^{(2)} + \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \cos \vartheta_2^{(02)}, \ldots$$
$$\ldots x_n^{(2)} + \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \ldots \sin \varphi^{(02)}, t^{(2)} + \xi_0^{(02)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-1}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) +$$
$$+ [\overline{\overline{K}}_1^{(02)}(x_1^{(2)} + \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, x_2^{(2)} + \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, \ldots, x_{n-1}^{(2)} +$$
$$+ \eta^{(02)} \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \ldots \sin \varphi^{(02)}, t^{(2)} + \xi_0^{(02)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-1}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) -$$
$$- \overline{\overline{K}}_1^{(02)}(x_1^{(2)} + \xi_0^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, x_2^{(2)} + \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)}, \ldots, x_n^{(2)} +$$
$$+ \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \ldots \sin \varphi^{(02)}, t^{(2)} +$$
$$+ \xi_0^{(02)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)})] \psi(\eta^{(02)}). \tag{16}$$

Отсюда очевидно следует справедливость формулы (13). Формула же (12) сразу очевидна для первого слагаемого правой части (16). Второе слагаемое мы представим в виде

$$\psi(\eta^{(02)}) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} [\overline{\overline{K}}_1^{(02)}(x_1^{(2)} + [1 - (1 - \eta^{(02)}) y] \xi_0^{(02)} \cos \vartheta_1^{(02)},$$
$$x_2^{(2)} + [1 - (1 - \eta^{(02)}) y] \xi_0^{(02)} \sin \vartheta_1^{(02)} \cdot \cos \vartheta_2^{(02)}, \ldots,$$
$$x_n^{(2)} + [1 - (1 - \eta^{(02)}) y] \xi_0^{(02)}, t^{(2)} + \xi_0^{(02)}; \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}] \, dy. \tag{17}$$

Дифференцируя эту формулу по параметру, легко доказать справедливость (12) для второго слагаемого правой части формулы (16).

Ядро $K^{(02)}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(2)}, t^{(2)})$, удовлетворяющее всем этим условиям, мы будем в дальнейшем называть ядром неизменяемого типа, а функции $\overline{\overline{K}}_1^{(02)}$ и $\tilde{\tilde{K}}_1^{(02)}$ его главными частями. Смысл этих названий выяснится в дальнейшем.

Аналогично мы потребуем, чтобы ядро $K^{(21)}(M^{(2)},t^{(2)};M^{(1)},t^{(1)})$ также было ядром неизменяемого типа.

Докажем следующую лемму:

ЛЕММА I. *Если $K^{(02)}$ и $K^{(21)}$ будут ядрами неизменяемого типа, то и новое ядро $K^{(01)}$ будет также ядром неизменяемого типа. Первая, главная, часть его $\overline{\overline{K}}{}_1^{(01)}$ представляется в виде:*

$$\overline{\overline{K}}{}_1^{(01)}(M^{(0)},t^{(0)};\vartheta_1^{(01)},\dots,\varphi^{(01)},\xi_0^{(01)})=$$
$$=\frac{s\pi^{s-1}\xi_0^{(01)^s}}{2^s}\sin\vartheta_1^{(01)^{\alpha_2+\dots+\alpha_n}}\dots\sin\varphi^{(01)^{\alpha_n}}\cos\vartheta_1^{(01)^{\alpha_1}}\cos\vartheta_2^{(01)^{\alpha_2}}\dots\cos\varphi^{(01)^{\alpha_{n-1}}}\times$$
$$\times\int_{-1}^{+1}(1-\rho_2^2)^{s-1}\,\overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}\left(M^{(0)},t^{(0)};\vartheta_1^{(01)},\dots,\vartheta_{n-2}^{(01)},\varphi^{(01)};\frac{\xi_0^{(01)}(1-\rho_2)}{2}\right)\times$$
$$\times\tilde{\tilde{K}}{}_1^{(21)}\Big(x_1^{(0)}-\xi_0^{(01)}\cos\vartheta_1^{(01)},\dots,x_n^{(0)}-\xi_0^{(01)}\sin\vartheta_1^{(01)}\dots\sin\varphi^{(01)},$$
$$t^{(0)}-\xi_0^{(01)},\vartheta_1^{(01)},\dots,\vartheta_{n-2}^{(01)},\varphi^{(01)},\frac{\xi_0^{(01)}(1+\rho_2)}{2}\Big)\,d\rho_2. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим предварительно, что нам достаточно изучить композицию ядер лишь в том случае, когда

$$\overline{\overline{K}}{}_2^{(02)}=\tilde{\tilde{K}}{}_2^{(21)}=0.$$

В самом деле, разбивая интеграл в правой части (4) на сумму четырех слагаемых, соответствующих попарно произведениям

$$\overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}\,\tilde{\tilde{K}}{}_2^{(21)}\,\psi(\eta^{(02)}),\quad \overline{\overline{K}}{}_2^{(02)}\,\tilde{\tilde{K}}{}_1^{(21)}\,\psi(\eta^{(21)}),\quad \overline{\overline{K}}{}_2^{(02)}\,\tilde{\tilde{K}}{}_2^{(21)}$$

и

$$\overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}\,\tilde{\tilde{K}}{}_1^{(21)}\,\psi(\eta^{(02)})\,\psi(\eta^{(21)}), \tag{19}$$

мы видим, что на основании оценок части I лишь последнее слагаемое будет содержать главный член. В остальных индексы регулярности ρ_1 и ρ_2 будут соответственно удовлетворять неравенствам

$$\rho_1\geqslant 2\alpha,\quad \rho_2\geqslant\alpha,$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Обозначим через L_0 величину интеграла в правой части (4) до дифференцирования. Ядро L_0 может быть представлено в виде

$$L_0=\frac{\xi_0^{(01)^{2s}}(1-\eta^{(01)^2})^s}{2^{2s}}\overbrace{\int\dots\int}^{n+1}_{\substack{\sqrt{\Sigma\zeta_i^2}\leqslant 1-|\tau|\\ |\tau|\leqslant 1}}\psi(\eta^{(02)})\psi(\eta^{(21)})\overline{\overline{K}}{}_1^{(02)}(M^{(0)},t^{(0)},\vartheta_1^{(02)},\dots,$$
$$\dots,\varphi^{(02)},\xi_0^{(02)})\cdot\tilde{\tilde{K}}{}_1^{(21)}(M^{(1)},t^{(1)};\vartheta_1^{(21)},\dots,\varphi^{(21)},\xi_0^{(21)})\,d\tau\,d\zeta_1\dots d\zeta_n=$$
$$=\frac{\xi_0^{(01)^{2s}}(1-\eta^{(01)^2})^s}{2^{2s}}J, \tag{20}$$

где через J обозначен, очевидно, интеграл по $\tau, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, и переменные $M^{(2)}$, $t^{(2)}$; $\vartheta_1^{(02)}, \ldots, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}, \vartheta_1^{(21)}, \ldots, \varphi^{(21)}, \xi_0^{(21)}$ выражаются через $\tau, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ с помощью формул (4), (30) и (33) части I.

Для производных от J нами была в части I установлена оценка типа

$$\left| \frac{\partial^m \overline{J}}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\gamma_1} \ldots \partial x_n^{(0)\gamma_n} \partial \xi_0^{(01)\beta_0} \partial \vartheta_1^{(01)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\beta_{n-1}} \partial \eta^{(01)\beta_n}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant A \xi_0^{(01)^{2\alpha - s - \beta_0}} \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{-\beta_n} \quad \text{при } \eta^{(01)} \geqslant \frac{1}{3}. \tag{21}$$

В настоящей работе мы дадим некоторое усиление этой оценки: Именно мы покажем, что при $\gamma > 0$ имеет место неравенство:

$$\left| \frac{\partial^m \overline{J}}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\gamma_1} \ldots \partial x_n^{(0)\gamma_n} \partial \xi_0^{(01)\beta_0} \partial \vartheta_1^{(01)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\beta_{n-1}} \partial \eta^{(01)\gamma}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant A \xi_0^{(01)^{\alpha - (n+1) - \beta_0}} \begin{cases} \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{\frac{1}{2} - \gamma} & \alpha > \frac{1}{2} \\ \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{\alpha - \gamma} & \alpha < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{22}$$

Для производных, не содержащих дифференцирования по $\eta^{(01)}$, сохраняется оценка старого типа:

$$\left| \frac{\partial^m \overline{J}}{\partial t^{(0)\alpha_0} \partial x_1^{(0)\alpha_1} \ldots \partial x_n^{(0)\alpha_n} \partial \xi_0^{(01)\beta_0} \partial \vartheta_1^{(01)\beta_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\beta_{n-1}}} \right| \leqslant A \xi_0^{(01)^{\alpha - (n+1) - \beta_0}}. \tag{23}$$

Формула (22) была доказана в части I работы. Переходим к доказательству формулы (23).

Для доказательства нам нужно будет повторить все рассуждения части I с одним уточнением, с которого мы и начнем. Из самого хода рассуждений очевидно, что формула (40) первой части может быть заменена оценкой

$$\left| \frac{\partial^\alpha \xi_i^{(02)}}{\partial \xi_0^{(01)\beta} \partial \eta^{(01)\gamma} \partial \vartheta_1^{(01)\alpha_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\alpha_{n-1}}} \right| \leqslant A \xi_0^{(01)^{1-\beta}} \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{\frac{1}{2} - \gamma}. \tag{24}$$

В соответствии с этим формула (42) части I может быть заменена также более точной:

$$\left| \frac{\partial^\alpha \vartheta_i^{(02)}}{\partial \eta^{(01)\alpha_0} \partial \vartheta_1^{(01)\alpha_1} \ldots \partial \varphi^{(01)\alpha_{n-1}}} \right| \leqslant C \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{\frac{1}{2} - \alpha_0}. \tag{25}$$

Для оценки производных от $\overline{J}$, если мы будем следовать методу, изложенному в части I, нам придется порознь оценивать производные от $\psi(\eta^{(02)}) \overline{\overline{K}}_1^{(02)}$ и производные от $\psi(\eta^{(21)}) \overline{\overline{K}}_1^{(21)}$. Эта оценка будет иметь вид:

$$\left| \frac{\partial^k \overline{\overline{K}}_1^{(02)} \psi(\eta^{(02)})}{\partial \xi_0^{(01)\varepsilon_0} \partial \eta^{(01)\varepsilon_1} \partial \vartheta_1^{(01)\varepsilon_2} \ldots \partial \varphi^{(01)\varepsilon_n} \partial t^{(0)\beta_0} \partial x_1^{(0)\beta_1} \ldots \partial x_n^{(0)\beta_n}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant A \sum \left(1 - \eta^{(01)}\right)^{\varkappa_1} \left(1 - \tau - \eta^{(01)} \zeta\right)^{\varkappa_2} \left[(1 - \tau)^2 - \sum \zeta_i^2\right]^{\varkappa_3} \zeta_1^{\varkappa_4} \xi_0^{(01)\varkappa_5}. \tag{26}$$

Для оценки значений, которые могут принимать в этой формуле показатели $\varkappa$, мы постараемся в наших предположениях получить более точные неравенства, чем неравенства части I.

Мы покажем, что первое из неравенств (45) для нашего случая будет верно в усиленной формулировке, если только $\varepsilon_1 > 0$, и что эти неравенства можно переписать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa_1 \geqslant \begin{cases} 0 & (\varepsilon_1 = 0) \\ \frac{1}{2} - \varepsilon_1 & (\varepsilon_1 > 0) \end{cases} \\ \varkappa_3 \geqslant 0 \qquad \varkappa_4 \geqslant 0 \qquad \varkappa_5 \geqslant \alpha - \frac{n+1}{2} - \varepsilon_0 \\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 \geqslant \alpha - \frac{n+1}{2} - \varepsilon_1 \\ \varkappa_2 + 2\varkappa_3 + \varkappa_4 = \alpha - \frac{n+1}{2}. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Доказательству подлежит только первое из этих неравенств при $\varepsilon_1 > 0$.

Оценивая показатель при $(1 - \eta^{(01)})$, мы вернемся к исследованию формулы, оценивающей производные от $K^{(02)}$. Оценивая показатель при $(1 - \eta^{(01)})$ в каждом из слагаемых правой части, мы разберем отдельно те слагаемые, где $\beta_1 > 0$, и те слагаемые, где $\beta_1 = 0$.

В тех слагаемых, где $\beta_1 > 0$, показатель при $(1 - \eta^{(01)})$ просто равен бесконечности, так как $\psi(\eta^{(02)})\,\overline{\overline{K}}_1^{(02)}$ при $\eta > \frac{2}{3}$ не зависит от $\eta^{(02)}$.

В тех же слагаемых, где $\beta_1 = 0$, как легко проверить, показатели $\lambda^{(1)}_{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_n}$ могут принимать только нулевые значения. Собирая оценку всех тех слагаемых, где степень у $(1 - \eta^{(01)})$ наинизшая (наибольшая по абсолютной величине), мы будем иметь

$$\varkappa_1 \geqslant \min\left[\sum\left(\frac{1}{2} - \gamma_1\right)\lambda^{(j)}_{\gamma_0\ldots\gamma_n}, 0\right]. \tag{28}$$

Если $\varepsilon_1 = 0$, то для всех значений $\gamma_i > 0$ соответствующие степени $\lambda^{(j)}_{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_n}$ могут принимать лишь нулевые значения. Поэтому для этого случая получится $\varkappa_1 \geqslant 0$.

Если же $\varepsilon_1 > 0$, то учитывая в формуле (28) лишь те слагаемые, где $\lambda^{(j)}_{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_n} > 0$, можем написать

$$\varkappa_1 \geqslant \min\left[\frac{1}{2} - \sum_{\substack{\text{по } j \\ \text{и по } \gamma}} \gamma_1\lambda^{(j)}_{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_n}, 0\right],$$

откуда, принимая во внимание, что $\sum\gamma_1\lambda^{(j)}_{\gamma_0\ldots\gamma_n} \leqslant \varepsilon_1$, получим для этого случая

$$\varkappa_1 \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon_1, \tag{29}$$

что и требовалось доказать.

Все дальнейшее можно установить без труда. Аналогично рассмотренному можно улучшить первое из неравенств (47) части I. При этом мы будем иметь после всех рассуждений

$$\left| \frac{\partial^k \tilde{\tilde{K}}_1^{(21)} \psi(\eta^{(21)})}{\partial \xi_0^{(01)^{\alpha_0-\varepsilon_0}} \partial \eta^{(01)^{\alpha_1-\varepsilon_1}} \ldots \partial \varphi^{(01)^{\alpha_n-\varepsilon_n}} \partial t^{(0)^{\beta_0}} \partial x_1^{(0)^{\beta_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\beta_n}}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \sum \left(1-\eta^{(01)}\right)^{\iota_1} \left(1+\tau+\eta^{(01)}\zeta_1\right)^{\iota_2} \left[(1+\tau)^2 - \sum \zeta_i^2\right]^{\iota_3} \zeta_1^{\iota_4} \xi_0^{(01)^{\iota_5}}, \quad (30)$$

где показатели ι_1, ι_2, ι_3, ι_4 и ι_5 удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &\iota_1 \geqslant \begin{cases} 0 & \alpha_1-\varepsilon_1 = 0 \\ \frac{1}{2}-\alpha_1+\varepsilon_1 & \alpha_1-\varepsilon_1 > 0 \end{cases} \qquad \iota_3 \geqslant 0 \qquad \iota_4 \geqslant 0 \\ &\iota_5 = \alpha - \frac{n+1}{2} - \alpha_0 + \varepsilon_0, \quad \iota_1+\iota_2+\iota_3 \geqslant \alpha - \frac{n+1}{2} - \alpha_1 + \varepsilon_1, \\ &\qquad \iota_2 + 2\iota_3 + \iota_4 = \alpha - \frac{n+1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Благодаря этому можно добиться улучшения также и в оценке (48) части I. Мы получим вместо нее

$$\left| \frac{\partial^r \left(\overline{\overline{K}}_1^{(02)} \tilde{\tilde{K}}_1^{(21)} \psi(\eta^{(02)}) \psi(\eta^{(21)})\right)}{\partial \xi_0^{(01)^{\alpha_0}} \partial \eta^{(01)^{\alpha_1}} \partial \vartheta_1^{(01)^{\alpha_2}} \ldots \partial \varphi^{(01)^{\alpha_n}} \partial t^{(0)^{\beta_0}} \partial x_1^{(0)^{\beta_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\beta_n}}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant A \sum \xi_0^{(01)^{2\alpha-n-1}} \left(1-\eta^{(01)}\right)^{\varkappa_1+\iota_1} \left(1-\tau-\eta^{(01)}\zeta_1\right)^{\varkappa_2} \left(1+\tau+\eta^{(01)}\zeta_1\right)^{\iota_2} \times$$

$$\times \left[(1-\tau)^2 - \sum \zeta_i^2\right]^{\varkappa_3} \left[(1+\tau)^2 - \sum \zeta_i^2\right]^{\iota_3} \zeta_1^{\varkappa_4+\iota_4}, \quad (32)$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, ι_1, ι_2, ι_3, ι_4 связаны неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_1 + \iota_1 \geqslant \begin{cases} 0 & \alpha_1 = 0 \\ \frac{1}{2} - \alpha_1 & \alpha_1 > 0, \end{cases} \\ &\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 \geqslant 2\alpha - (n+1) - \alpha_1, \\ &\varkappa_1 + \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 \geqslant \alpha - \frac{n+1}{2} - \alpha_1, \\ &\iota_1 + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 \geqslant \alpha - \frac{n+1}{2} - \alpha_1, \\ &\varkappa_3 \geqslant 0, \quad \varkappa_4 \geqslant 0, \quad \iota_3 \geqslant 0, \quad \iota_4 \geqslant 0, \\ &\varkappa_2 + 2\varkappa_3 + \varkappa_4 = \alpha - \frac{n+1}{2}, \quad \iota_2 + 2\iota_3 + \iota_4 = \alpha - \frac{n+1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Улучшение формул (48) и (49) части I дает возможность сразу получить искомые формулы (22) и (23) с помощью простого повторения рассуждений, проведенных в части I.

После этих замечаний мы можем уже вернуться к оценке L_0 и $K^{(01)}$.

Производные от L_0, взятые по $x_1^{(01)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}$, очевидно представляются в виде линейных комбинаций из производных от L_0 по $x_1^{(0)}, \ldots, t^{(0)}, \eta_1^{(01)}, \ldots, \eta_n^{(01)}, \xi_0^{(01)}$ или в виде линейных комбинаций из производных от L_0 по $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, \xi_0^{(01)}, \eta^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}$.

Пользуясь формулой

$$\frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, \xi^{(01)}, \eta^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_n^{(01)}, \varphi^{(01)})}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}} \partial x_1^{(0)^{\alpha_1}} \ldots \partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}} =$$

$$= \frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} F}{\partial \eta^{(01)^{\frac{n+1}{2}}}} \left(\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial t^{(0)}}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial x_1^{(0)}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial x_n^{(0)}}\right)^{\alpha_n} + \ldots, \tag{34}$$

где все невыписанные члены содержат дифференцирование по $\eta^{(01)}$ меньше чем $\frac{n+1}{2}$ раз, мы видим, что ядро $K^{(01)}$ отличается от

$$\frac{\partial^{\frac{n+1}{2}} L_0}{\partial \eta^{(01)^{\frac{n+1}{2}}}} \left(\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial t^{(0)}}\right)^{\alpha_0} \ldots \left(\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial x_n^{(0)}}\right)^{\alpha_n} \tag{35}$$

лишь такими слагаемыми, которые удовлетворяют условиям (12) и (13).

Таким образом для доказательства леммы I достаточно доказать ее для выражения (35), откуда будет сразу следовать и справедливость для $K^{(01)}$.

Заметим теперь, что производные от $\eta^{(01)}$ по $x_i^{(0)}$ и $t^{(0)}$ имеют вид:

$$\frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial t^{(0)}} = -\frac{\eta^{(01)}}{\xi_0^{(01)}}; \quad \frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial x_i^{(01)}} = \frac{\partial \eta^{(01)}}{\partial \eta_i^{(01)}} \cdot \frac{\partial \eta_i^{(01)}}{\partial x_i^{(01)}} = \frac{\eta_i^{(01)}}{\xi_0^{(01)} \eta^{(01)}} =$$

$$= \frac{1}{\xi_0^{(01)}} \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{i-1}^{(01)} \cos \vartheta_i^{(01)}. \tag{36}$$

Отсюда следует, что выражение (35) отличается от

$$\frac{s!\, \xi_0^{(01)^s} (1+\eta^{(01)})^s}{2^{2s}} \sin \vartheta_1^{(01)^{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n}} \sin \vartheta_2^{(01)^{\alpha_3+\ldots+\alpha_n}} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}} \times$$

$$\times \sin \varphi^{(01)^{\alpha_n}} \cos \vartheta_1^{(01)^{\alpha_1}} \cos \vartheta_2^{(01)^{\alpha_2}} \ldots \cos \varphi^{(01)^{\alpha_{n-1}}} J \tag{37}$$

лишь слагаемыми, удовлетворяющими условиям (12) и (13).

В самом деле при дифференцировании L_0 по $\eta^{(01)}$ мы получим по формуле Лейбница либо такие члены, где J дифференцируется по $\eta^{(01)}$ и для которых (12) и (13) суть следствия (22) и (23), либо слагаемые, в которых дифференцируется полином от $\eta^{(01)}$ вида $(1+\eta^{(01)})^s$, либо, наконец, слагаемые, в которых дифференцируется $1-\eta^{(01)})^s$. Только то из них не будет подходить под (12) и (13), в котором $(1-\eta^{(01)})^s$ продифференцировано ровно s раз.

Для того чтобы завершить доказательство леммы I, нам нужно установить, что выражение (37) является само ядром неизменяемого типа, и высчитать, чему равен его главный член.

Докажем прежде всего, что $J - J\big|_{\eta^{(01)}=1} = J'$ будет удовлетворять условиям (12) и (13). Отсюда уже будет вытекать, что (37) ядро неизменяемого типа.

С этой целью заметим, что J' представимо в виде

$$J' = \int_0^1 \frac{\partial J}{\partial \eta^{(01)}} (M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, 1-(1-\eta^{(01)})y, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)})\, dy. \quad (38)$$

Из формулы (38) все искомые оценки получаются непосредственно.

4. Вычисление главной части $\overline{K}_{01}$

Сосчитаем теперь $J\big|_{\eta^{(01)}=1}$. Из формул (4), (30) и (33) части I следует, что при $\eta^{(01)}=1$ аргументы $M^{(2)}, t^{(2)}$ будут зависеть кроме $M^{(0)}, t^{(0)}$; $M^{(1)}, t^{(1)}$ только от суммы $\tau+\zeta_1$. Поэтому мы можем проинтегрировать по остальным переменным $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ непосредственно. Очевидно

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0<\sqrt{\Sigma \zeta_i^2}<1-|\tau|} d\zeta_2 \ldots d\zeta_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1} \dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}} [(1+\tau)^2-\zeta_1^2]^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} & (\tau<0), \\[2ex] \dfrac{2}{n-1} \dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}} [(1-\tau)^2-\zeta_1^2]^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} & (\tau>0), \end{cases} \quad (39)$$

ибо при фиксированных ζ_1 и τ область интегрирования есть просто $(n-1)$-мерный шар с радиусами, соответственно, $[(1+\tau)^2-\zeta_1^2]^{\frac{1}{2}}$ и $[(1-\tau)^2-\zeta_1^2]^{\frac{1}{2}}$.

Так как подинтегральная функция не зависит от $\tau-\zeta$, то мы можем, введя в интеграл J новые переменные интегрирования $\rho_1=\tau-\zeta$; $\rho_2=\tau+\zeta$, проинтегрировать по ρ_1. Пределы интегрирования будут при этом $-1\leqslant\rho_1\leqslant-1$ и $-1\leqslant\rho_2\leqslant 1$. Принимая во внимание, что $\tau=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$, мы будем отдельно интегрировать по области, где $\rho_1+\rho_2\leqslant 0$, и по области, где $\rho_1+\rho_2\geqslant 0$. Подсчитаем ядро, которое войдет после интегрирования по ρ_2. Так как

$$\int_{-1}^{-\rho_2} (1+\rho_1)^{\frac{n-1}{2}} (1+\rho_2)^{\frac{n-1}{2}} d\rho_1 + \int_{-\rho_2}^{1} (1-\rho_1)^{\frac{n-1}{2}} (1-\rho_2)^{\frac{n-1}{2}} d\rho_1 =$$

$$= \frac{1}{s}[(1-\rho_2)^{\frac{n+1}{2}} (1+\rho_2)^{\frac{n-1}{2}} + (1+\rho_2)^{\frac{n+1}{2}} (1-\rho_2)^{\frac{n-1}{2}}] =$$

$$= \frac{2}{s}(1-\rho_2^2)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (40)$$

то искомое ядро, как нетрудно проверить, будет

$$\frac{(s-1)!\, \xi_0^{(01)^s}}{2^{s-1}} (1-\rho_2^2)^{s-1} \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{\pi^{s-1}}{\Gamma(s-1)} = \frac{\xi_0^{(01)^s} \pi^{s-1}}{2^{s-1}} (1-\rho_2^2)^{s-1}. \quad (41)$$

Отсюда сразу вытекает формула для $\overline{\overline{K}}_1^{(01)}$:

$$\overline{\overline{K}}_1^{(01)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \xi_0^{(01)^s} \int\limits_{-1}^{+1} (1-\rho_2^2)^{s-1} \times$$
$$\times \overline{\overline{K}}_1^{(02)} (M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(02)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(02)}, \varphi^{(02)}, \xi_0^{(02)}) \times$$
$$\times \tilde{\tilde{K}}_1^{(21)} (M^{(1)}, t^{(1)};\ \vartheta_1^{(21)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(21)}, \varphi^{(21)}, \xi_0^{(21)})\, d\rho_2 \times$$
$$\times \sin \vartheta_1^{(01)^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \ldots \sin \varphi^{(01)^{\alpha_n}} \cos \vartheta_1^{(01)^{\alpha_1}} \ldots \cos \varphi^{(01)^{\alpha_{n-1}}}. \quad (42)$$

Заметим теперь, что при $\eta^{(01)} = 1$ формулы (30) и (33) части I дают:

$$x_i^{(0)} - x_i^{(2)} = \frac{\xi_0^{(01)}}{2} \eta_i^{(01)} (1-\rho_2); \quad x_i^{(2)} - x_i^{(1)} = \frac{\xi_0^{(01)} \eta_i^{(01)}}{2} (1+\rho_2). \quad (43)$$

Отсюда получим:

$$\vartheta_i^{(21)} = \vartheta_i^{(02)} = \vartheta_i^{(01)}, \quad \varphi^{(21)} = \varphi^{(02)} = \varphi^{(01)}. \quad (44)$$

Кроме того, очевидно:

$$\left.\begin{aligned} t^{(0)} - t^{(2)} &= \xi_0^{(02)} = \frac{\xi_0^{(01)} (1-\rho_2)}{2}, \\ t^{(2)} - t^{(1)} &= \xi_0^{(21)} = \frac{\xi_0^{(01)} (1+\rho_2)}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Отсюда получим окончательно:

$$\overline{\overline{K}}_1^{(01)} (M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)}, \xi_0^{(01)}) =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \xi_0^{(01)^s} \int\limits_{-1}^{+1} (1-\rho_2^2)^{s-1} \times$$
$$\times \overline{\overline{K}}_1^{(02)} \left(M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)}, \frac{\xi_0^{(01)} (1-\rho_2)}{2}\right) \times$$
$$\times \tilde{\tilde{K}}_1^{(21)} \Big(x_1^{(0)} - \xi_0^{(01)} \cos \vartheta_1^{(01)}, x_2^{(0)} - \xi_0^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \cos \vartheta_2^{(01)}, \ldots$$
$$\ldots, x_n^{(0)} - \xi_0^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)} \cos \varphi^{(01)}, t^{(0)} - \xi_0^{(01)};$$
$$\vartheta_1^{(01)}, \vartheta_2^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}, \frac{\xi_0^{(01)} (1+\rho_2)}{2}\Big)\, d\rho_2 \sin \vartheta_1{}^{(01)^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \ldots$$
$$\ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}} \sin \varphi^{(01)^{\alpha_n}} \cos \vartheta_1^{(01)^{\alpha_1}} \ldots \cos \varphi^{(01)^{\alpha_{n-1}}}. \quad (46)$$

Формула (46) и дает искомую главную часть ядра $\overline{\overline{K}}^{(01)}$.

5. Композиция двух интегродифференциальных операций

Пусть $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ две интегродифференциальные операции рассматриваемого типа:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{L}_1 f &= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K^{(1)}_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ M^{(1)}, t^{(1)}) \times \\
&\quad \times \frac{\partial^p f(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)}\, dt^{(1)}, \\
\mathfrak{L}_2 f &= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K^{(2)}_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ M^{(1)}, t^{(1)}) \times \\
&\quad \times \frac{\partial^p f(M^{(0)}, t^{(0)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)}\, dt^{(1)}.
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Пусть индексы $\rho_1^{(1)} > 0$, $\rho_1^{(2)} > 0$, $\rho_2^{(1)} = \rho_2^{(2)} = 0$, и те ядра, которые умножаются на производные порядка s, суть ядра неизменяемого типа.

Обозначим через $\overset{*}{\mathfrak{L}}_1 f$ и будем называть главной частью операции $\mathfrak{L}_1$ такую операцию, которая получается выбрасыванием всех ядер с положительным ρ_2 и заменой остальных через их главные части. Иными словами, пусть

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{\mathfrak{L}}_1 f &= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum \overline{\overline{K}}{}^{(1)}_{1_{p_0 \ldots p_n}} \psi(\eta^{(01)}) \frac{\partial^s f(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)}\, dt^{(1)}, \\
\overset{*}{\mathfrak{L}}_2 f &= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum \overline{\overline{K}}{}^{(2)}_{1_{p_0 \ldots p_n}} \psi(\eta^{(01)}) \frac{\partial^s f(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)}\, dt^{(1)}.
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Пусть, кроме того, $\mathfrak{L}_1 - \overset{*}{\mathfrak{L}}_1 = \overline{\mathfrak{L}}_1$, $\mathfrak{L}_2 - \overset{*}{\mathfrak{L}}_2 = \overline{\mathfrak{L}}_2$. Составим произведение операций $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_3$. Предполагая, как всегда, что f уничтожается вместе с достаточным количеством производных при $t = 0$, мы будем иметь после выкладок, аналогичных тем, которые были проведены в части I,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 f &= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(2)} \leqslant t^{(0)} - r^{(02)}} \sum K^{(1)}_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ M^{(2)}, t^{(2)}) \frac{\partial^p}{\partial t^{(2)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(2)^{p_n}}} \times \\
&\quad \times \left\{ \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(2)} - r^{(21)}} \sum K^{(2)}_{q_0 \ldots q_n}(M^{(2)}, t^{(2)};\ M^{(1)}, t^{(1)}) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\partial^q f(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{q_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{q_n}}} dM^{(1)}\, dt^{(1)} \right\} dM^{(2)}\, dt^{(2)} =
\end{aligned}$$

$$= \overbrace{\int\limits_{0\leqslant t^{(1)}\leqslant t^{(0)}-r^{(01)}} \cdots \int}^{n+1} \sum \frac{\partial^{p+q-\lambda} f(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)p_0+q_0-\lambda_0} \ldots \partial x_n^{(1)p_n+q_n-\lambda_n}} C\begin{pmatrix} p_0 \ldots p_n \\ \lambda_0 \ldots \lambda_n \end{pmatrix} \times$$

$$\times \Bigg\{ \overbrace{\int\limits_{t^{(1)}+r^{(21)}\leqslant t^{(2)}\leqslant t^{(0)}-r^{(02)}} \cdots \int}^{n+1} K^{(1)}_{p_0\ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ M^{(2)}, t^{(2)}) \times$$

$$\times \frac{\partial^\lambda \tilde{\tilde{K}}^{(2)}_{q_0\ldots q_n}(M^{(2)}, t^{(2)};\ \xi_0^{(21)}, \eta^{(21)}, \vartheta_1^{(21)}, \ldots, \varphi^{(21)})}{\partial t^{(2)\lambda_0}\, \partial x_1^{(2)\lambda_1} \ldots \partial x_n^{(2)\lambda_n}} dM^{(2)}\, dt^{(2)} \Bigg\} dM^{(1)}\, dt^{(1)}. \quad (49)$$

Интегрируя по частям в наружном интеграле (49), легко добьемся того, чтобы понизить порядок производных от f в операции $\mathfrak{L}_3$ до s или даже ниже. Соберем теперь главную часть операции $\mathfrak{L}_3$. Это можно сделать различными способами. Остановимся на каком-либо одном из них. Пусть, например, производная

$$\frac{\partial^{2s} f}{\partial t^{(1)p_0+q_0} \ldots \partial x_n^{(1)p_n+q_n}}$$

интегрируется по частям так, чтобы в результате получилась

$$\frac{\partial^s f}{\partial t^{(1)q_0}\, \partial x_1^{(1)q_1} \ldots \partial x_n^{(1)q_n}}.$$

Тогда, обозначая

$$\mathring{\mathfrak{L}}_3 = \overbrace{\int\limits_{0\leqslant t^{(1)}\leqslant t^{(0)}-r^{(01)}} \cdots \int}^{n+1} \sum_{q_0+\ldots+q_n=s} \psi(r^{(01)})\, K^{(3)}_{1\, q\ldots q_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ M^{(1)}, t^{(1)}) \times$$

$$\times \frac{\partial^s f}{\partial t^{(1)q_0} \ldots \partial x_n^{(1)q_n}} dx_1^{(1)} \ldots dx_n^{(1)}\, dt^{(1)}, \quad (50)$$

и принимая во внимание, что $C\begin{pmatrix} p_0 \ldots p_n \\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = 1$, мы получим для ядра $K^{(3)}_{1\, q_0\ldots q_n}$ выражение

$$K^{(3)}_{1\, q_0\ldots q_n} = \sum_{p_0+\ldots+p_n=s} \sin \vartheta_1^{(01)p_2+\ldots+p_n} \ldots \sin \varphi^{(01)p_n} \cos \vartheta_1^{(01)p_1} \ldots$$

$$\ldots \cos \varphi^{(01)p_n-1} \frac{\xi_0^{(01)s} \pi^{s-1}}{2^{s-1}} \int\limits_{-1}^{+1} (1-\rho_2^2)^{s-1} \times$$

$$\times \overline{\overline{K}}^{(1)}_{1\, p_0\ldots p_n}\left(M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}, \xi_0^{(01)} \frac{(1-\rho_2)}{2}\right) \times$$

$$\times \tilde{\tilde{K}}^{(2)}_{q_0\ldots q_n}\left(x_1^{(0)} - \xi_0^{(01)} \cos \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \xi_0^{(01)} \frac{(1+\rho_2)}{2}\right) d\rho_2. \quad (51)$$

6. Резольвента интегродифференциального уравнения

Рассмотрим теперь уравнения

$$u = f + \mathfrak{L}u, \tag{52}$$

где f обращается в нуль нужным образом при $t^0 = 0$. Попробуем искать решение этого уравнения в виде

$$u = v + \mathfrak{G}v, \tag{53}$$

где $\mathfrak{G}v$ — некоторая новая интегродифференциальная операция, которую мы определим позднее. Подставляя (53) в (52), мы видим, что формула эта дает решение уравнения (52), если

$$v + \mathfrak{G}v = f + \mathfrak{L}v + \mathfrak{L}\mathfrak{G}v, \tag{54}$$

иными словами, если функция v есть решение интегродифференциального уравнения

$$v = f + (\mathfrak{L} - \mathfrak{G} + \mathfrak{L}\mathfrak{G})\, v. \tag{55}$$

Если выбрать операцию $\mathfrak{G}$ таким образом, чтобы

$$\overset{*}{\mathfrak{L}} - \overset{*}{\mathfrak{G}} + \overset{*}{\mathfrak{L}}\overset{*}{\mathfrak{G}} = 0, \tag{56}$$

т. е. чтобы главная часть операции, стоящей в правой части (55), *уничтожалась, то уравнение* (55) *будет разрешимо по методу последовательных приближений, как это доказано в части I настоящего исследования.*

Операцию $\mathfrak{G}$ мы будем называть резольвентой уравнения (52).

На основании предыдущего параграфа условие (56) будет представлять собою систему обыкновенных интегральных (не интегродифференциальных) уравнений для определения главной части ядер резольвенты $\mathfrak{G}$. Эта система, как мы сейчас докажем, разрешима по методу последовательных приближений и имеет единственное решение. Подставляя затем это значение $\mathfrak{G}$ в уравнение (55), мы найдем v и построим таким образом решение исходного интегродифференциального уравнения (52).

Можно доказать и единственность такого решения. В самом деле, пусть u какое-нибудь решение (52). Подставляя это решение в (53), мы получим новое уравнение для определения v, которое по доказанному разрешимо. Следовательно, всякое решение (52) представимо в виде (53) с какой-либо v. Но так как v из (55) определяется единственным образом, то и решение (52) также единственно. Результат этот удобно формулировать в виде теоремы:

ТЕОРЕМА. *Уравнение* (52) *для ядер неизменяемого типа при* $\rho_2 = 0$ *разрешимо и имеет единственное решение.*

Для доказательства теоремы нам нужно еще только установить разрешимость уравнения (56) относительно ядер $\overset{*}{\mathfrak{G}}$ и доказать, что полученные ядра будут удовлетворять условию (11). К доказательству этих утверждений мы и переходим.

Пусть операция $\overset{*}{\mathfrak{G}}$ имеет вид

$$\overset{*}{\mathfrak{G}} f = \overbrace{\int \ldots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum \Gamma_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}) \psi(\eta^{(01)}) \times$$

$$\times \frac{\partial^s f}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)} dt^{(1)}.$$

Для определения каждого из ядер $\Gamma_{p_0 \ldots p_n}$ мы получим из (56) интегральное уравнение

$$\Gamma_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}) =$$

$$= \overline{\overline{K}}_{1_{p_0 \ldots p_n}}(M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}) +$$

$$+ \sum_{q_0 + \ldots + q_n = s} \sin \vartheta_1^{(01)^{q_2 + \ldots + q_n}} \ldots \sin \varphi^{(01)^{q_n}} \cos \vartheta_1^{(01)^{q_1}} \ldots$$

$$\ldots \cos \varphi^{(01)^{q_{n-1}}} \frac{\xi_0^{(01)^s} \pi^{s-1}}{2^{s-1}} \int_{-1}^{+1} (1 - \rho_2^2)^{s-1} \times$$

$$\times \overline{\overline{K}}_{1_{q_0 \ldots q_n}}\left(M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}, \frac{\xi_0^{(01)}(1 - \rho_2)}{2}\right) \times$$

$$\times \overline{\overline{\Gamma}}_{p_0 \ldots p_n}\left(x_1^{(0)} - \xi_0^{(01)} \cos \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \xi_0^{(01)} \frac{(1 + \rho_2)}{2}\right) d\rho_2. \qquad (57)$$

Метод последовательных приближений дает для решения этого уравнения ряд

$$\overline{\overline{\Gamma}}_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{P}}^{(n)}_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)};\ \xi_0^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}), \qquad (58)$$

где

$$\overline{\overline{P}}^{(0)}_{p_0 \ldots p_n} = \overline{\overline{K}}_{1_{p_0 \ldots p_n}},$$

и

$$\overline{\overline{P}}^{(n+1)}_{p_0 \ldots p_n} = \sum_{q_0 + \ldots + q_n = s} \sin \vartheta_1^{(01)^{q_2 + \ldots + q_n}} \ldots \sin \varphi^{(01)^{q_n}} \cos \vartheta_1^{(01)^{q_n}} \ldots$$

$$\ldots \cos \varphi^{(01)^{q_{n-1}}} \frac{\xi_0^{(01)^s} \pi^{s-1}}{2^{s-1}} \int_{-1}^{+1} (1 - \rho_2^2)^{s-1} \times$$

$$\times \overline{\overline{K}}_{1_{q_0 \ldots q_n}}\left(M^{(0)}, t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}, \frac{\xi_0^{(01)}(1 - \rho_2)}{2}\right) \times$$

$$\times P^{(n)}_{p_0 \ldots p_n}\left(x_1^{(0)} - \xi_0^{(01)} \cos \vartheta_1^{(01)}, x_2^{(0)} - \xi_0^{(01)} \sin \vartheta_1^{(01)} \cos \vartheta_2^{(01)}, \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, t^{(0)} - \xi_0^{(01)};\ \vartheta_1^{(01)}, \ldots, \varphi^{(01)}, \xi_0^{(01)} \frac{(1 + \rho_2)}{2}\right) d\rho_2. \qquad (59)$$

Покажем сходимость этого ряда. Мы установим, что

$$P^{(n)}_{p_0 \ldots p_n} \leqslant C^n \frac{\xi_0^{(01)^{n\alpha-1}}}{\Gamma(n\alpha)}, \tag{60}$$

где α — число, входившее в формулы (7), (8) и (9), а C — некоторая постоянная.

Предположим оценку (60) установленной для некоторого n; установим ее для $(n+1)$. Будем иметь

$$|\overline{\overline{P}}^{(n+1)}_{p_0 \ldots p_n}| \leqslant \mathfrak{L} \xi_0^{(01)^s} \int_{-1}^{+1} (1-\rho_2^2)^{s-1} \left[\frac{\xi_0 (1-\rho_2)}{2}\right]^{\alpha - s} \frac{C^n}{\Gamma(n\alpha)} \times$$

$$\times \left[\frac{\xi_0^{(01)} (1+\rho_2)}{2}\right]^{n\alpha - s} d\rho_2 \tag{61}$$

или

$$|\overline{\overline{P}}^{(n+1)}_{p_0 \ldots p_n}| \leqslant N \frac{\xi_0^{(01)(n+1)\alpha - s}}{\Gamma(n\alpha)} C^n \int_{-1}^{+1} (1-\rho_2)^{\alpha-1} (1+\rho_2)^{n\alpha-1} d\rho_2 =$$

$$= N \frac{C^n \xi_0^{(01)(n+1)\alpha - s}}{\Gamma(n\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)} \leqslant C^n \frac{\xi_0^{(01)(n+1)\alpha - s}}{\Gamma((n+1)\alpha)}.$$

ч. т. д.

Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{\Gamma(n\alpha)} \tag{62}$$

при всех положительных ρ вытекает абсолютная сходимость (58) и, следовательно, существование у (57) решения, удовлетворяющего условию

$$|\overline{\overline{\Gamma}}_{p_0 \ldots p_n}| \leqslant \xi_0^{(01)^{\alpha - s}}. \tag{63}$$

Нам остается доказать, что производные от $\Gamma_{p_0 \ldots p_n}$ удовлетворяют условию (12).

Доказательство этого предложения элементарно. Достаточно, например, просто продифференцировать формулу (59), дающую выражения для $P^{(n)}_{p_0 \ldots p_n}$. После этого мы получим рекуррентные оценки для производных от $\overline{P}^{n}_{p_0 \ldots p_n}$, из которых следует равномерная сходимость ряда из производных от (58) вместе с искомой форму-

лой (12). Наметим основные черты этого доказательства. Дифференцирование (59) дает

$$\frac{\partial^m \overline{\overline{P}}{}^{(n+1)}_{p_0\ldots p_n}}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}}\,\partial x_1^{(0)^{\alpha_1}}\ldots\partial x_n^{(0)^{\alpha_n}}\,\partial\xi_0^{(01)^{\beta_0}}\,\partial\vartheta_1^{(01)^{\beta_1}}\ldots\partial\vartheta_{n-2}^{(01)^{\beta_{n-2}}}\,\partial\varphi^{(01)^{\beta_{n-1}}}}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{+1}\sum C\xi_0^{(01)^{\varkappa_1}}(1-\rho_2)^{\varkappa_2}(1+\rho_2)^{\varkappa_3}\times$$

$$\times\frac{\partial^p\overline{K}_{q_0\ldots q_n}\left(M^{(0)},t^{(0)};\ \vartheta_1^{(01)},\ldots,\vartheta_{n-2}^{(01)},\varphi^{(01)},\xi_0^{(01)}\frac{(1-\rho_2)}{2}\right)}{\partial t^{(0)^{\varepsilon_0}}\,\partial x_1^{(0)^{\varepsilon_1}}\ldots\partial x_n^{(0)^{\varepsilon_n}}\,\partial\xi_0^{(01)^{\gamma_0}}\,\partial\vartheta_1^{(01)^{\gamma_1}}\ldots\partial\vartheta_{n-2}^{(01)^{\gamma_{n-2}}}\,\partial\varphi^{(01)^{\gamma_{n-1}}}}\times$$

$$\times\frac{\partial^q\overline{\overline{P}}{}^{(n)}_{p_0\ldots p_n}\left(x_1^{(0)}-\xi_0^{(01)}\frac{(1-\rho_2)}{2}\cos\vartheta_1^{(01)},\ x_2^{(0)}-\xi_0^{(01)}\frac{(1-\rho_2)}{2}\sin\vartheta_1^{(01)}\cos\vartheta_2^{(01)}.\right.}{\partial t^{(0)^{\delta_0}}\,\partial x_1^{(0)^{\delta_1}}\ldots\partial x_n^{(0)^{\delta_n}}}$$

$$\frac{\ldots,x_n^{(0)}-\xi_0^{(01)}\frac{(1-\rho_2)}{2}\sin\vartheta_1^{(01)}\ldots,\sin\varphi^{(01)},\ t^{(0)}-\xi_0^{(01)}\frac{(1-\rho_2)}{2};}{\partial\xi_0^{(01)^{\rho_0}}}$$

$$\frac{\left.\vartheta_1^{(01)},\ldots,\vartheta_{n-2}^{(01)},\varphi^{(01)},\xi_0^{(01)}\frac{(1+\rho_2)}{2}\right)}{\partial\vartheta_1^{(01)^{\rho_1}}\ldots\partial\varphi^{(01)^{\rho_{n-1}}}}P\left(\vartheta_1^{(01)},\ldots,\vartheta_{n-2}^{(01)},\varphi^{(01)}\right)d\rho_2, \qquad (64)$$

где P — некоторые тригонометрические полиномы от $\vartheta_1^{(01)},\ldots,\varphi^{(01)}$, уточнять которые нет надобности, а C — некоторые постоянные. Суммирование распространяется на конечное число слагаемых, в которых показатели $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ и порядки дифференцирования подинтегральных функций связаны соотношениями:

$$\left.\begin{array}{ll}\varkappa_3=\rho_0+s-1, & \varkappa_1\geqslant s+\gamma_0+\rho_0-\beta_0,\\ \varkappa_2\geqslant\beta_0-\rho_0+s-1, & \gamma_0+\rho_0\leqslant\beta_0.\end{array}\right\} \qquad (65)$$

Мы докажем с помощью полной индукции, что производные от P удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial^l P^n}{\partial t^{(0)^{\gamma_0}}\,\partial x_1^{(0)^{\gamma_1}}\ldots\partial x_n^{(0)^{\gamma_n}}\,\partial\xi_0^{(01)^{\beta_0}}\cdot\partial\varphi^{(01)^{\beta_{n-1}}}}\right|\leqslant A\,\frac{\xi_0^{(01)^{n\alpha-s-\beta_0}}}{\Gamma(n\alpha)}, \qquad (66)$$

где A — некоторая постоянная. Индукцию мы будем проводить как по порядку дифференцирования по $\xi_0^{(01)}$, так и по всем остальным.

Пусть это неравенство установлено для всех производных порядка l от $P^{(n)}$, в которых порядок дифференцирования по $\xi_0^{(01)}$ не превосходит β_0-1, и для всех производных от $P^{(n-1)}$ порядка l, в которых порядок дифференцирования по $\xi_0^{(01)}$ равен β_0.

Замечая, что при этом в подинтегральном выражении (64) стоят лишь слагаемые, величина которых оценена с помощью (66), и подставляя эту оценку в (64), будем иметь:

$$\left|\frac{\partial^m p^{(n+1)}}{\partial t^{(0)^{\alpha_0}}\ldots\partial x_n^{(0)^{\alpha_n}} d\xi_0^{(01)^{\beta_0}}\partial\vartheta_1^{(01)^{\beta_1}}\ldots\partial\vartheta_{n-2}^{(01)^{\beta_{n-2}}}\partial\varphi^{(01)^{\beta_{n-1}}}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^{n-1}N}{\Gamma(n\alpha)}\int\limits_{-1}^{+1}\sum \xi_0^{(01)^{\varkappa_1+\alpha-s-\gamma_0+n\alpha-s-\rho_0}}\times$$

$$\times(1-\rho_2)^{\varkappa_2+\alpha-s-\gamma_0}(1+\rho_2)^{\varkappa_3+n\alpha-s-\rho_0}d\rho_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^{n-1}M}{\Gamma(n\alpha)}\xi_0^{(01)\,(n+1)\,\alpha-s-\beta_0}\sum\int\limits_{-1}^{+1}(1-\rho_2)^{\varkappa_2+\alpha-s-\gamma_0}(1+\rho_2)^{\varkappa_3+n\alpha-s-\rho_0}d\rho_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^{n-1}M}{\Gamma(n\alpha)}\xi_0^{(01)(n+1)\alpha-s-\beta_0}\sum\frac{\Gamma(\varkappa_2+\alpha-s-\gamma_0+1)\,\Gamma(\varkappa_3+n\alpha-s-\rho_0+1)}{\Gamma(\varkappa_2+\varkappa_3-2s-\gamma_0-\rho_0+(n+1)\alpha+2)}$$

и так как

$$\Gamma(\varkappa_2+\varkappa_3-\gamma_0-\rho_0+(n+1)\alpha-2s)\geqslant\Gamma((n+1)\alpha)$$

и

$$\Gamma(\varkappa_3+n\alpha-s-\rho_0+1)=\Gamma(n\alpha),$$

то

$$\left|\frac{\partial^m P^{(n)}_{p_0\ldots p_n}}{\partial\xi_0^{(01)^{\beta_0}}\ldots}\right| \leqslant \frac{A^n\xi_0^{(01)(n+1)\alpha-s-\beta_0}}{\Gamma(n+1)\alpha};$$

ч. т. д.

Тем самым установлено существование решения у (5) и показано, каким способом это решение строится. Практически нет надобности непременно брать Γ в виде $\Gamma_1\psi(\eta^{(01)})$. Очевидно, что вместо такого Γ можно брать любое ядро с той же главной частью.

7. Уравнения с нечетным числом независимых переменных и метод спуска (подъема)

Теорию решения интегродифференциальных уравнений с индексом $\rho_2=0$ для случая, когда n число четное, можно было бы развить таким же способом, как это было сделано для n нечетного. Однако мы предпочтем здесь применить другой прием, принадлежащий Адамару и известный под названием метода спуска.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение с $n+1$ независимыми переменными

$$u(M^{(0)},t^{(0)})=f(M^{(0)},t^{(0)})+$$

$$+\overbrace{\int\cdots\int}^{n+1}_{0\leqslant t^{(1)}\leqslant t^{(0)}-r^{(01)}}\sum_{p_0\ldots p_n}K_{p_0\ldots p_n}(M^{(0)},t^{(0)};M^{(1)},t^{(1)})\times$$

$$\times\frac{\partial^p u}{\partial t^{(1)^{p_0}}\ldots\partial x_n^{(1)^{p_n}}}dM^{(1)}dt^{(1)}. \qquad (67)$$

Пусть все показатели $\mu_{p_0 \ldots p_n}$ этого уравнения будут удовлетворять неравенству

$$\mu_{p_0 \ldots p_n} > -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим пространство $(n+2)$ измерений с координатами $y, x_1, \ldots, x_n, t$; точку этого пространства будем обозначать $\overset{*}{M}, t$, и построим в этом пространстве уравнение

$$u(\overset{*}{M}^{(0)}, t^{(0)}) = f(\overset{*}{M}^{(0)}, t^{(0)}) +$$

$$+ \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum_{p_0 \ldots p_n} \frac{K_{p_0 \ldots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})}{2\sqrt{(t^{(0)} - t^{(1)})^2 - r^{(01)^2}}} \times$$

$$\times \frac{\partial^p u(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} d\overset{*}{M}^{(1)} dt^{(1)}. \tag{68}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего положения:

ЛЕММА II. *Все решения* (67) *удовлетворяют также уравнению* (68).

В самом деле, пользуясь тем, что в уравнении (68), после подстановки туда функции $u(M^{(0)}, t^{(0)})$, подинтегральная функция не зависит от $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$, мы можем выполнить интегрирование по $y^{(1)}$, и так как

$$\int\limits_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} dy = 2\sqrt{(t^{(0)} - t^{(1)})^2 - r^{(01)^2}},$$

то мы получим сразу искомое утверждение.

Мы доказали одновременно, что *решения уравнения* (68), *не зависящие от* y, *удовлетворяют также* (67).

Докажем еще одно утверждение.

ЛЕММА III. *Индексы регулярности у обоих уравнений* (67) *и* (68) *совпадают.*

Эта лемма вытекает из того, что в уравнении (68) все первые показатели ядер $K_{p_0 \ldots p_n}$ уменьшились на единицу, а вторые на $\frac{1}{2}$.

Пользуясь этим, мы можем всегда заменить данное уравнение (67) при четном n другим уравнением (68) с четным числом независимых переменных, для которого разрешимость установлена. Легко проверить непосредственно, что решение уравнения (68) с четным n не будет зависеть от y. Это вытекает из анализа решения таких уравнений, полученного выше, и из единственности такого решения.

8. Уравнения с индексом регулярности $\rho_1 = 0$

Нами было показано, как решать уравнения с первым индексом регулярности $\rho_1 > 0$. Мы дадим сейчас пример того, что уравне-

ния, у которых индекс $\rho_1 = 0$, могут не иметь никаких решений или иметь их бесчисленное множество.

Пусть $w(M^{(1)}, t^{(1)})$ некоторая функция переменной точки $M^{(1)}, t^{(1)}$, имеющая достаточное количество непрерывных производных. Допустим также, что

$$\left.\frac{\partial^{k+p} w}{\partial t^{(1)k}\, \partial x_1^{(1)p_1} \dots \partial x_n^{(1)p_n}}\right|_{t^{(1)}=0} = 0 \tag{69}$$

при $k = 0, 1, \dots, \nu$.

Рассмотрим функцию переменных $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t^{(1)}$:

$$[w] = w(t^{(1)}, x_1^{(0)} + \alpha_1(t^{(0)} - t^{(1)}), \dots, x_n^{(0)} + \alpha_n(t^{(0)} - t^{(1)})). \tag{70}$$

Очевидно

$$\frac{\partial^{\nu+1}[w]}{\partial t^{(1)\nu+1}} = \sum_{\gamma_0 + \dots + \gamma_n = \nu} \frac{\nu!\,(-1)^{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}}{\gamma_0! \dots \gamma_n!} \times$$

$$\times\, \alpha_1^{\gamma_1} \dots \alpha_n^{\gamma_n} \left[\frac{\partial^{\nu+1} w}{\partial t^{(1)\gamma_0} \dots \partial x_n^{(1)\gamma_n}}\right]. \tag{71}$$

Очевидно также, что при условии (69)

$$w(M^{(0)}, t^{(0)}) = [w]_{t=t^{(0)}} = \int_0^{t^{(0)}} \frac{\partial^{(\nu+1)}[w]}{\partial t^{(1)\nu+1}} \frac{(t^{(0)} - t^{(1)})^\nu}{\nu!}\, dt^{(1)}. \tag{72}$$

Умножим обе части (72) на функцию

$$e^{\frac{\sum \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2 - 1}},$$

обращающуюся в нуль со всеми производными при $\sum \alpha_i^2 = 1$, и проинтегрируем по $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по шару $\sum \alpha_i^2 \leqslant 1$.

Будем иметь:

$$w(M^{(0)}, t^{(0)}) =$$

$$= \varkappa \overbrace{\int \dots \int}^{n+1}_{\substack{0 \leqslant t \leqslant t^{(0)} \\ \sum \alpha_i^2 \leqslant 1}} \frac{\partial^{\nu+1}[w]}{\partial t^{(1)\nu+1}} \frac{(t^{(0)} - t^{(1)})^\nu}{\nu!} e^{\frac{\sum \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2 - 1}}\, dt^{(1)}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \tag{73}$$

Заменяя в последнем интеграле переменные, полагая $x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \alpha_i(t^{(0)} - t^{(1)})$, будем иметь

$$d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \frac{1}{(t^{(0)} - t^{(1)})^n}\, dx_1^{(1)} \dots dx_n^{(1)}. \tag{74}$$

При этом область интегрирования переходит в конус

$$0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}. \tag{75}$$

Заменяя $\frac{\partial^{\nu+1}[w]}{\partial t^{\nu+1}}$ его выражением (71), будем иметь:

$$w(M^{(0)}, t^{(0)}) = \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K_{p_0 \ldots p_n} \times$$

$$\times \frac{\partial^{\nu+1} w(M^{(1)}, t^{(1)})}{\partial t^{(1)^{p_0}} \ldots \partial x_n^{(1)^{p_n}}} dM^{(1)} dt^{(1)} = \mathfrak{L} w, \tag{76}$$

где через $K_{p_0 \ldots p_n}$ обозначено

$$K_{p_0 \ldots p_n} = \frac{(-1)^{p_1 + \ldots + p_n} \nu}{p_0! \ldots p_n!} \prod_{i=1}^{n} (x_i^{(0)} - x_i^{(1)})^{p_i} \times$$

$$\times (t^{(0)} - t^{(1)})^{\nu - \sum p_i - n} e^{\frac{r^{(01)^2}}{r^{(01)^2} - (t^{(0)} - t^{(1)})^2}}. \tag{77}$$

Очевидно, что первый индекс регулярности операции, стоящей в правой части (76), будет равен

$\rho_1 = \nu - \sum p_i - n + \sum p_i + n + 1 - \nu - 1 = 0$. Второй индекс $\mu_2 = +\infty$ в виду наличия множителя $e^{\frac{\eta^{(01)^2}}{\eta^{(01)^2} - \xi_0^{(01)^2}}}$.

Рассматривая (76) как интегродифференциальное уравнение для определения w, мы видим, что это уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как ему удовлетворяет любая функция w, подчиненная условию (69).

Рассматривая теперь уравнение

$$w = f + \mathfrak{L} w, \tag{78}$$

где f обращается в нуль при $t = 0$ с достаточным количеством производных, видим, что это уравнение не может иметь никаких решений, ибо для любого решения такого уравнения должно быть $w = \mathfrak{L} w$, что противоречит (78).

9. Уравнения с отрицательным индексом ρ_2

Рассмотрим еще один пример интегродифференциального уравнения, не имеющего решения. Пусть $n = 1$ и неизвестная функция u удовлетворяет уравнению

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) = f(x^{(0)} - t^{(0)}) +$$

$$+ \iint\limits_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - |x^{(0)} - x^{(1)}|} K(x^{(0)}, t^{(0)}; x^{(1)}, t^{(1)}) \frac{\partial^l u(x^{(1)}, t^{(1)})}{\partial x^{(1)^l}} dx^{(1)} dt^{(1)} =$$

$$= f(x^{(0)} - t^{(0)}) +$$

$$+ \iint\limits_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - |x^{(0)} - x^{(1)}|} K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) \frac{\partial^l u(x^{(1)}, t^{(1)})}{\partial x^{(1)^l}} dx^{(1)} dt^{(1)}, \tag{79}$$

где ядро $K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)})$ определяется формулой

$$K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) = \begin{cases} e^{\frac{(\xi_0^{(01)}-A)^2}{(\xi_0^{(01)}-A)^2-\delta^2}} (\xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)})^{l-1-\frac{1}{m}} \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\xi_1^{(01)}}{\xi_0^{(01)}}\right) & A - \delta \leqslant t^{(0)} - t^{(1)} \leqslant A + \delta, \\ 0 & (t^{(0)} - t^{(1)} - A) > \delta, \end{cases} \quad (80)$$

где m — некоторое целое число, а A и δ мы фиксируем позднее. Это ядро, очевидно, дифференцируемо неограниченное количество раз и имеет показатели $\lambda = \infty$ и $\mu = l - 1 - \frac{1}{m}$ и, следовательно, индексы $\rho_1 = \infty$ и $\rho_2 = -\frac{1}{m}$.

Мы докажем, что

При надлежащем выборе постоянных A и δ, какова бы ни была функция f, дифференцируемая конечное число раз, уравнение (79) *не будет иметь решения в полосе $0 \leqslant t^{(0)} \leqslant \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число.*

К этому уравнению можно, очевидно, непосредственно применить метод подъема и переделать его в уравнение с большим числом независимых переменных. При этом, как мы доказали в § 5, индексы регулярности остаются неизменными.

Отсюда ясно, что число переменных роли вообще не играет и что ни при каком числе независимых переменных результаты, полученные нами выше, не могут быть существенно улучшены, если не сделать каких-либо новых предположений о характере изучаемых уравнений.

Решение уравнения (79), благодаря свойствам ядра, непосредственно определяется в каждом из промежутков

$$i(A - \delta) \leqslant t^{(0)} \leqslant (i + 1)(A - \delta), \quad (81)$$

если только известны значения неизвестной функции в предыдущих промежутках. Это вытекает из того, что при

$$t^{(0)} \leqslant (i + 1)(A - \delta)$$

интегрирование в правой части будет совершаться лишь в области

$$t^{(1)} \leqslant i(A - \delta).$$

В промежутке $0 \leqslant t^{(0)} \leqslant (A - \delta)$ по той же причине

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) = f(x^{(0)} - t^{(0)}). \quad (82)$$

Рассмотрим теперь систему промежутков α_i, определенных неравенствами

$$(i - 1)(A + \delta) \leqslant t^{(0)} \leqslant i(A - \delta).$$

Число этих промежутков будет, очевидно, равно $\left[\frac{A+\delta}{2\delta}\right] = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{A}{\delta}\right]$ и при надлежащем выборе отношения $\frac{\delta}{A}$ будет сколь угодно велико. Мы докажем, что

В каждом из промежутков α_i *решение уравнения* (79) *зависит только от разности* $x^{(0)} - t^{(0)}$.

В самом деле, если $t^{(0)}$ лежит в промежутке α_i, то интегрирование в правой части (79) совершается лишь по области, где

$$t^{(0)} - (A+\delta) \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(01)} - (A-\delta), \tag{83}$$

и, следовательно, только по области, где $t^{(1)}$ принадлежит α_{i-1}.

Положим теперь, что наше утверждение справедливо для промежутка α_{i-1} и пусть в промежутке α_{i-1} функция u равна $u_{i-1}(x^{(0)} - t^{(0)})$. Определяя теперь значение u в промежутке α_i, будем иметь:

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) = f(x^{(0)} - t^{(0)}) +$$
$$+ \iint\limits_{\substack{|\xi_1^{(01)}| \leqslant \xi_0^{(01)} \\ A-\delta \leqslant \xi_0^{(01)} \leqslant A+\delta}} K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) \frac{\partial^l u_{i-1}(x^{(1)} - t^{(1)})}{\partial x_1^{(1)l}} \, dx^{(1)} \, dt^{(1)}. \tag{84}$$

Заменяя в последнем интеграле переменные интегрирования $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ через $\xi_0^{(01)}$ и $\xi_1^{(01)}$, получим:

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) = f(x^{(0)} - t^{(0)}) +$$
$$+ \iint\limits_{\substack{A-\delta \leqslant \xi_0^{(01)} \leqslant A+\delta \\ |\xi_1^{(01)}| \leqslant \xi_0^{(01)}}} K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) \frac{\partial^l u_{i-1}(x^{(0)} - t^{(0)} + \xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)})}{\partial x^{(0)l}} \, d\xi_1^{(01)} d\xi_0^{(01)}. \tag{85}$$

Так как правая часть (85) зависит только от $x^{(0)} - t^{(0)}$, то и левая часть зависит только от $x^{(0)} - t^{(0)}$, что и доказывает наше утверждение.

Вместе с этим мы получаем для $u_i(\xi)$ уравнение

$$u_i(\xi) = f(\xi) +$$
$$+ \iint\limits_{\substack{|\xi_0^{(01)} - A| \leqslant \delta \\ |\xi_0^{(01)}| \leqslant \xi_1^{(01)}}} K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) \frac{\partial^l u_{i-1}(\xi + \xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)})}{\partial \xi^l} \, d\xi_1^{(01)} \, d\xi_0^{(01)}. \tag{86}$$

Для удобства всего дальнейшего мы будем считать интегрирование в правой части распространенным на все полупространство $\xi_0^{(01)} > \xi_1^{(01)}$ и будем считать ядро тождественно равным нулю при

$$|\xi_0^{(01)} - A| \geqslant \delta \quad \text{и} \quad \xi_1^{(01)} > \xi_0^{(01)}. \tag{87}$$

Ядро останется при этом непрерывным со всеми производными, и мы получаем

$$u_i(\xi) = f(\xi) +$$

$$+ \iint\limits_{\xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)} > 0} K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) \frac{\partial^l u_{i-1}(\xi + \xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)})}{\partial \xi^l} d\xi_1^{(01)} d\xi_0^{(01)}. \quad (88)$$

Введем в этот интеграл новые переменные, полагая $\eta = \xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)}$ и интегрируя по $\xi_0^{(01)}$. Получим

$$u_i(\xi) = f(\xi) + \int\limits_{\eta > 0} \frac{\partial^l u_{i-1}(\xi + \eta)}{\partial \xi^l} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\xi_0^{(01)}, \xi_0^{(01)} - \eta)\, d\xi_0^{(01)} \right) d\eta.$$

Обозначая

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\xi_0^{(01)}, \xi_0^{(01)} - \eta)\, d\xi_0^{(01)} = K(\eta),$$

получим

$$u_i(\xi) = f(\xi) + \int\limits_0^{\infty} K(\eta) \frac{\partial^l u_{i-1}(\xi + \eta)}{\partial \xi^l} d\eta. \quad (89)$$

Рассмотрим основные свойства ядра $K(\eta)$.

1° *Ядро* $K(\eta)$ *имеет неограниченно много непрерывных производных при* $\eta > 0$.

2° *При* $\eta > 2(A + \delta)$

$$K(\eta) = 0. \quad (90)$$

Это вытекает из того, что при $\eta > 2(A + \delta)$ мы имеем

$$\xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)} > 2(A + \delta)$$

и, следовательно, либо $\xi_0^{(01)} > A + \delta$, либо $\begin{cases} \xi_0^{(01)} < A + \delta \\ \xi_1^{(01)} < -(A + \delta) \end{cases}$ и $|\xi_1^{(01)}| > \xi_0^{(01)}$, откуда $K = 0$ в силу (87).

3° *В промежутке* $0 \leqslant \eta \leqslant \frac{2}{3}(A - \delta)$ *ядро* K *представляется в виде*

$$K(\eta) = \varkappa \eta^{l - 1 - \frac{1}{m}}, \quad (91)$$

где

$$\varkappa = \int\limits_{-\delta}^{+\delta} e^{\frac{t^2}{t^2 - \delta^2}} dt. \quad (92)$$

В самом деле, при $\eta \leqslant \frac{2}{3}(A - \delta)$ мы будем иметь $\xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)} \leqslant \frac{2}{3}(A - \delta)$ и, следовательно, при всяком значении $\xi_0^{(01)}$ из промежутка $A - \delta \leqslant \xi_0^{(01)} \leqslant A + \delta$ будет:

$$\xi_0^{(01)} \geqslant \xi_0^{(01)} - \frac{2}{3}(A - \delta) \quad \text{или} \quad \frac{1}{3}\xi_1^{(01)} \leqslant \xi_1^{(01)} \leqslant \xi_0^{(01)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\xi_1^{(01)}}{\xi_0^{(01)}} \geqslant \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\xi_1^{(01)}}{\xi_0^{(01)}} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Но при этом из формулы (80) в силу определения функции ψ вытекает

$$K(\xi_0^{(01)}, \xi_1^{(01)}) = e^{\frac{(\xi_0^{(01)}-A)^2}{(\xi_0^{(01)}-A)^2-\delta^2}}\,\eta^{l-\frac{1}{m}-1}, \tag{93}$$

откуда сразу получим искомые формулы (91) и (92).

Интегрируем теперь в уравнении (89) по частям слагаемое, содержащее $K(\eta)$. Будем иметь:

$$u_i(\xi) = f(\xi) + \int_0^\infty N(\eta)\frac{\partial u_{i-1}(\xi+\eta)}{\partial \xi}\,d\eta, \tag{94}$$

где ядро $N(\eta)$: a) имеет непрерывные производные при $\eta > 0$, b) обращается в нуль при $\eta > 2(A+\delta)$, c) в промежутке $0 \leqslant \eta \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{3}(A-\delta)$ обращается в функцию $C\eta^{-\frac{1}{m}}$, где C—некоторая постоянная.

Найдем теперь выражение $u_{i+m}(\xi)$ через $u_i(\xi)$. Будем иметь:

$$u_{i+m}(\xi) = f(\xi) + \overbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}^{m} N(\eta_1)N(\eta_2)\ldots N(\eta_m)\times$$
$$\times \frac{\partial^m u_i(\xi+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m)}{\partial\xi^m}\,d\eta_1\ldots d\eta_m. \tag{95}$$

Вводя в интеграл (95) новые переменные интегрирования и полагая

$$\eta_1+\eta_2=\psi_2, \ \ldots \quad \eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_i=\psi_i,$$

получим:

$$u_{i+m}(\xi) = f(\xi) + \int_0^\infty \frac{\partial^m u_i(\xi+\psi_m)}{\partial\xi^m}\int_0^{\psi_m} N(\psi_m-\psi_{m-1})\int_0^{\psi_{m-1}} N(\psi_{m-1}-\psi_{m-2})\ldots$$
$$\ldots\left(\int_0^{\psi_2} N(\psi_2-\eta_1)N(\eta_1)\,d\eta_1\right)\ldots d\psi_m =$$
$$= f(\xi) + \int_0^\infty \frac{\partial^m u_i(\xi+\psi_m)}{\partial\xi^m} Z(x_m)\,d\psi_m. \tag{96}$$

Изучим свойства ядра $Z(\psi_m)$. Мы докажем, что

1° *ядро* $Z(\psi_m)$ *имеет неограниченное количество производных при* $\psi_m > 0$,

2° *ядро* $Z(\psi_m)$ *обращается в нуль при* $\psi_m > m(A+\delta)$,

3° *ядро* $Z(\psi_m)$ *выражается формулой* $Z(\psi_m) = C\psi_m^{m-1}$ *при* $0 \leqslant \psi_m \leqslant \frac{1}{3}(A - \delta)$, *где* C — *некоторая постоянная.*

Для доказательства этого положения превратим наш интеграл в интеграл с постоянными пределами. Пусть

$$\psi_1 = \psi_2\chi_1, \ \psi_2 = \psi_3\chi_2, \dots, \psi_{m-1} = \psi_m\chi_{m-1},$$

т. е.

$$\psi_{m-2} = \psi_m\chi_{m-1}\chi_{m-2}, \dots, \psi_1 = \psi_m\chi_{m-1}\chi_{m-2}, \dots \chi_1.$$

Получим

$$Z(\psi_m) = \int_0^1 \dots \int_0^1 N(\psi_m(1 - \chi_{m-1}))\, N(\psi_m(\chi_{m-1} - \chi_{m-1}\chi_{m-2})) \dots$$
$$\dots N(\psi_m(\chi_{m-1}\chi_{m-2} \dots \chi_2 - \chi_{m-1}\chi_{m-2} \dots \chi_1)) \times$$
$$\times\, d\chi_1 \dots d\chi_m\, \psi_m^m \chi_{m-1}^{m-1}\chi_{m-2}^{m-2} \dots \chi_1. \tag{97}$$

Утверждение 1° вытекает из возможности дифференцирования этого интеграла по параметру, 2° следует из того, что при $\psi_m > m(A + \delta)$ по крайней мере одно из выражений $(\psi_i - \psi_{i-1}), \dots, (\psi_2 - \eta_1)$ и η_1 будет больше $(A + \delta)$, отчего соответствующий множитель обратится в нуль.

Наконец, утверждение 3° немедленно вытекает из того, что, при $\psi_m \leqslant \frac{1}{3}(A - \delta)$, $Z(\psi_m)$ представляется просто в виде

$$Z(\psi_m) = \psi_m^{(m-1)} \int_0^1 \dots \int_0^1 C^m (1 - \chi_{m-1})^{-\frac{1}{m}} \times$$
$$\times (\chi_{m-1} - \chi_{m-1}\chi_{m-2})^{-\frac{1}{m}} \dots d\chi_m. \tag{98}$$

Интегрируя теперь по частям m раз уравнение (96), будем иметь:

$$u_{i+m}(\xi) = f(\xi) + \frac{\partial u_i(\xi)}{\partial \xi} + \int_0^\infty \Omega(\eta)\, u_i(\xi + \eta)\, d\eta,$$

где $\Omega(\eta)$ обладает свойствами: a) $\Omega(\eta)$ имеет все непрерывные производные, b) $\Omega(\eta)$ обращается в нуль при $\eta \leqslant \frac{1}{3}(A - \delta)$ и при $\eta \geqslant m(A + \delta)$.

Пользуясь формулой (99) и определяя $u_{i+m}(\xi)$ через $u_i(\xi)$, мы видим, что каждая следующая функция $u_{i+m}(\xi)$ имеет на одну производную меньше, чем $u_i(\xi)$. Если $f(\xi)$ дифференцируется конечное число раз, то $u_i(\xi)$ дифференцируется также лишь конечное число раз, и, следовательно, при достаточно большом k функция $u_{1+km}(\xi)$ не будет существовать.

Выбирая $\frac{\delta}{A}$ столь малым, чтобы число промежутков α_i было больше k, а затем A настолько малым, чтобы все эти промежутки помещались в полосе $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, мы видим, что уравнение (79) не будет иметь решения в этой полосе, что и требовалось доказать.

10. Некоторые замечания по поводу обобщений метода

Мы рассматриваем в настоящей работе такие интегродифференциальные уравнения, в которых переменная область интегрирования является прямым конусом с постоянным углом растворения. В приложениях, однако, встречается ряд уравнений, в которых эта область не будет строго конической. Это обстоятельство может оказать самое решающее влияние на все результаты. Не имея здесь места для того, чтобы останавливаться на этом вопросе более детально, мы отметим все же некоторые особенности, которые могут при этом встретиться.

Пусть область в пространстве $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}$, по которой происходит интегрирование, есть $D(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t^{(0)})$. Введем понятие о сопряженных областях. Мы будем называть переменную область $D^*(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)})$ в пространстве $x_1^{(0)}, \ldots, t^{(0)}$, зависящую от точки $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)}$ и состоящую из тех точек $M^{(0)}, t^{(0)}$, для которых $M^{(1)}, t^{(1)}$ попадает в $D(M^{(0)}, t^{(0)})$, областью, сопряженной с D.

Рассмотрим теперь тело $V(x_1^{(0)}, \ldots, t^{(0)}; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, t^{(1)})$, полученное пересечением областей $D(M^{(0)}, t^{(0)})$ и $D(M^{(1)}, t^{(1)})$. Объем этого тела $P(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})$ уничтожается, если области D и D^* не имеют общих точек. Число абсолютно интегрируемых производных у функции $P(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)})$ мы назовем индексом интегродифференциального уравнения.

Если порядок дифференцирования старшей из производных, входящих в уравнение, меньше индекса уравнения, то оно в большом количестве случаев оказывается разрешимым по методу последовательных приближений.

Если этот порядок равен индексу уравнения, то для решения его иногда удается воспользоваться особым приемом, вроде того, который использован нами во второй части настоящего исследования. Уравнения, в которых индекс меньше, чем порядок старшей производной, представляют вообще значительные особенности.

Заметим, что индекс уравнений, рассмотренных нами, был $\frac{n+1}{2}$. В случае, который имеет место в теории краевых задач математической физики, этот индекс равен $\frac{n}{2}+1$.

К этому вопросу мы еще вернемся впоследствии в одной из следующих статей.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
11.XI.1937.

S. SOBOLEFF. SUR UNE CLASSE DES ÉQUATIONS INTÉGRODIFFÉRENTIELLES À PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES

RÉSUMÉ

On considère les équations intégrodifférentielles

$$u = f + \mathfrak{L}u, \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{L}u = \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K_{p_0 \dots p_n}(M^{(0)}, t^{(0)}; M^{(1)}, t^{(1)}) \times$$
$$\times \frac{\partial^p u}{\partial t^{(1)p_0} \partial x_1^{(1)p_1} \dots \partial x_n^{(1)p_n}} dx_1^{(1)} \dots dx_n^{(1)} dt^{(1)} \tag{2}$$

aux indices

$$\rho_1 > 0, \quad \rho_2 = 0. \tag{3}$$

(Voir la 1-ère partie de ce mémoire *.)

On suppose que $p \leqslant s = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Pour n impaire on suppose d'ailleurs que chaque noyau $K_{p_0 \dots p_n}$ pour lequel $p_0 + \dots + p_n = s$ peut être décomposé en somme

$$K_{p_0 \dots p_n} = K_{(1)p_0 \dots p_n} + K_{(2)p_0 \dots p_n}, \tag{4}$$

où $K_{(1)}$ pour $\eta^{(01)} \geqslant \frac{2}{3}$ ne dépend pas de $\eta^{(01)}$

$$\left. \begin{array}{r} \dfrac{\partial K_{(1)p_0 \dots p_n}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t^{(0)}, \xi_0^{(01)}, \eta^{(01)}, \vartheta_1^{(01)} \dots \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)})}{\partial \eta^{(01)}} = 0 \\ \left(\eta^{(01)} \geqslant \frac{2}{3}\right) \end{array} \right\} \tag{5}$$

et les noyaux $K_{(2)p_0 \dots p_n}$, ont les propriétés suivantes:

Soit $\overset{*}{\mathfrak{L}}$ l'opération qu'on obtient de $\mathfrak{L}$ en remplaçant chaque $K_{p_0 \dots p_n}$ par $K_{(1)p_0 \dots p_n}$, et en effaçant tous les noyaux $K_{p_0 \dots p_n}$ pour $p_0 + \dots + p_n < s$.

$\overset{*}{\mathfrak{L}}$ soit dite la partie principale de l'opération $\mathfrak{L}$. Alors les fonctions $K_{(2)p_0 \dots p_n}$ sont de la sorte que l'opération $\mathfrak{L} - \overset{*}{\mathfrak{L}}$ a l'indice $\rho_2 > 0$.

Pour résoudre l'équation (1) on cherche d'abord l'opération $\mathfrak{G}$ de telle façon que

$$\overset{*}{\mathfrak{G}} = \overset{*}{\mathfrak{L}} + \overset{*}{\mathfrak{L}}\overset{*}{\mathfrak{G}}. \tag{6}$$

On peut établir que l'équation (6) permet de trouver cette opération $\mathfrak{G}$ au moyen de la résolution d'un système d'équations intégrales.

---

* Bulletin de l'Ac. Sci. de l'URSS, Série mathem., 1937, № 4.

Si nous cherchons u dans l'aspect

$$u = v + \mathfrak{G}v \tag{7}$$

nous aurons pour v l'équation

$$v + \mathfrak{G}v = f + \mathfrak{L}v + \mathfrak{L}\mathfrak{G}v. \tag{8}$$

Grâce à (8) cette équation peut être résolue au moyen des approximations successives.

On donne deux examples qui montrent que les équations intégro-différentielles à l'indice $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 < 0$ en générale n'ont pas de solution.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Д. А. РАЙКОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ЗАКОНОВ ГАУССА И ПУАССОНА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа посвящена доказательству ряда результатов, относящихся к новой отрасли теории вероятностей, называемой арифметикой законов распределения.

Введение

Как известно, закон или функция распределения $F(x)$ случайной величины X определяется как вероятность того, что X не превосходит x. $F(x)$ — неубывающая функция, определенная на всей прямой $-\infty < x < \infty$, непрерывная справа и подчиненная условию $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $F(x) \to 1$ при $x \to +\infty$. Как это обычно принято, условие непрерывности справа мы отбросим и будем считать две функции, удовлетворяющие остальным перечисленным условиям, представляющими один и тот же закон распределения, если они совпадают во всех своих точках непрерывности. Если X_1 и X_2 — независимые случайные величины, распределенные, соответственно, по законам $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то их сумма $X = X_1 + X_2$ распределена по закону $F(x)$, получающемуся из $F_1(x)$ и $F_2(x)$ путем «свертывания» или компонирования:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y).$$

$F(x)$ называется композицией $F_1(x)$ и $F_2(x)$; пишут

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) = F_2(x) * F_1(x).$$

$F_1(x)$ и $F_2(x)$ называются компонентами $F(x)$.

Предметом арифметики законов распределения является изучение операции компонирования этих законов.

Мы видели, что операция компонирования коммутативна. Нетрудно убедиться также в том, что она ассоциативна:

$$[F_1(x) * F_2(x)] * F_3(x) = F_1(x) * [F_2(x) * F_3(x)] = \\ = F_1(x) * F_2(x) * F_3(x).$$

Роль единицы относительно этой операции играет функция $\varepsilon(x)$, равная нулю при $x<0$, равная единице при $x>0$ и принимающая произвольное значение от 0 до 1 при $x=0$; роль делителей единицы играют функции $\varepsilon(x-\alpha)$, $\alpha \gtreqless 0$. Действительно, для всех вещественных α и всех $F(x)$

$$F(x)=F(x+\alpha) * \varepsilon(x-\alpha), \qquad (1)$$

так что $\varepsilon(x-\alpha)$ являются компонентами любого закона распределения (в частности закона $\varepsilon(x)$); с другой стороны, никаких других компонент, кроме законов того же вида $\varepsilon(x-\alpha)$, они, как легко видеть, содержать не могут. Мы будем называть $\varepsilon(x-\alpha)$ единичными законами распределения. Разложения (1) закона $F(x)$, равно как и входящие в него компоненты $F(x+\alpha)$ и $\varepsilon(x-\alpha)$ ($\alpha \gtreqless 0$), мы будем называть несобственными. Всякое разложение $F(x)$, не являющееся несобственным, мы будем называть собственным. Если $F(x)$ имеет собственные разложения, то она называется разложимой, в противном случае — неразложимой, или простой. Функции $F(x)$ и $F(x+\alpha)$, получающиеся друг из друга посредством смещения переменной (или, что то же, посредством компонирования с единичной функцией), мы будем называть эквивалентными. Типом функции $F(x)$ мы будем называть совокупность всех функций $F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$, где $\sigma \geqslant 0$, $\alpha \gtreqless 0$; случаю $\sigma=0$ будут соответствовать единичные законы $\varepsilon(x-\alpha)$.

Если случайная величина X распределена по закону $F(x)$, то $-X$ распределена по закону $1-F(-x)$. Мы будем называть $1-F(-x)$ законом, сопряженным с $F(x)$, и обозначать его через $\bar{F}(x)$. Нетрудно проверить, что имеют место соотношения $\bar{\bar{F}}(x)=F(x)$ и $\overline{F_1(x) * F_2(x)}=\bar{F}_1(x) * \bar{F}_2(x)$. Законы, совпадающие со своими сопряженными, называются симметричными. При компонировании любого закона $F(x)$ с его сопряженным $\bar{F}(x)$ получается симметричный закон $F^*(x)=F(x) * \bar{F}(x)$. Мы будем называть $F^*(x)$ симметризованным законом.

Каждому закону распределения $F(x)$ соответствует характеристическая функция

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

определенная на прямой $-\infty<t<\infty$. В свою очередь $f(t)$ однозначно определяет функцию $F(x)$, с точностью до значений последней в точках разрыва. *При компонировании законов распределения соответствующие им характеристические функции просто перемножаются* (что и делает применение характеристических функций столь важным орудием в теоретико-вероятностных исследованиях). Мы можем поэтому перенести на характеристи-

ческие функции всю установленную выше терминологию, с заменой слов «закон распределения», «компонирование», «композиция», «компонента» словами «характеристическая функция», «перемножение», «произведение», «делитель» (или «множитель»). Говоря о разложении характеристических функций на множители, мы будем всегда подразумевать, что эти множители суть характеристические функции. Единичными характеристическими функциями будут служить функции $e^{i\alpha t}$, $\alpha \gtreqless 0$ (характеристические функции единичных законов распределения $\varepsilon(x-\alpha)$). Эквивалентными будут характеристические функции, отличающиеся единичным множителем $e^{i\alpha t}$. Тип характеристической функции $f(t)$ будут составлять функции $e^{i\alpha t} f(\sigma t)$ $\Big($характеристические функции законов распределения $F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\Big)$. Если закону распределения $F(x)$ соответствует характеристическая функция $f(t)$, то сопряженному закону $\overline{F}(x)$ будет соответствовать в качестве характеристической функции $f(-t)$, являющаяся комплексно-сопряженной с $f(t)$, так как для любой характеристической функции

$$f(-t) = \overline{f(t)}. \tag{2}$$

Симметричным законам будут соответствовать вещественные характеристические функции; в силу соотношения (2) они всегда четны. Симметризованному закону $F^*(x)$ будет соответствовать характеристическая функция $f^*(t) = f(t) f(-t) = |f(t)|^2$.

В 1935 г. H. Cramér (¹) доказал выдвинутое P. Lévy в 1931 г. предположение, что законы Гаусса (см. § 2) разлагаются только на законы Гаусса. Тем самым было доказано существование законов распределения, совсем не имеющих простых компонент. Важность класса таких законов для всей арифметики законов распределения была обнаружена затем А. Я. Хинчиным (⁵), показавшим, что каждая характеристическая функция может быть разложена на два множителя, один из которых представим в виде произведения одних лишь простых характеристических функций, а другой является характеристической функцией, совсем не имеющей простых делителей. Если бы класс законов распределения, не имеющих простых компонент, — будем для краткости называть его, равно как и класс соответствующих характеристических функций, классом C,—исчерпывался совокупностью законов Гаусса, то результат А. Я. Хинчина давал бы довольно простую картину: всякая характеристическая функция, не делящаяся ни на одну гауссовскую, разлагалась бы на простые множители (правда, как показал P. Lévy, вообще говоря, не однозначно). Однако, как мне удалось недавно доказать (⁴), такого же рода свойством, что и гауссовские законы, обладают также законы Пуассона (см. § 3): они разлагаются только на законы Пуассона.

Тем самым был расширен известный нам объем класса C, а дальнейшие исследования показали, что этот класс не исчерпывается и совокупностью законов Гаусса и Пуассона.

Задачей настоящей работы является исследование вопроса о разложении законов Гаусса и Пуассона, а также композиций законов Пуассона, и постановка некоторых вопросов, относящихся к проблеме определения объема класса C *.

Работа H. Cramér'a поставила вопрос о создании теории аналитических характеристических функций. В первом параграфе настоящей работы доказываются две теоремы, имеющие для этой теории фундаментальное значение. В них обобщаются некоторые аналитические предпосылки метода H. Cramér'a, являющегося основой рассмотрений §§ 2, 3, 6 и 7 **. Во втором параграфе дается доказательство теоремы H. Cramér'a о разложении законов Гаусса, основывающееся на одной лемме из первого параграфа и — в этой части — более простое, чем доказательство самого H. Cramér'a. В третьем параграфе излагается доказательство теоремы о разложении законов Пуассона, в форме, приданной ему А. Я. Хинчиным. Упрощение по сравнению с моим первоначальным доказательством заключается в том, что вместо характеристических функций А. Я. Хинчин пользуется производящими; поэтому он имеет возможность сослаться на готовый результат из классической теории роста целых функций, который мною раньше фактически передоказывался в терминах целых периодических функций. Четвертый и пятый параграфы посвящены доказательству двух характеристических признаков законов Гаусса и законов Гаусса и Пуассона: в четвертом параграфе доказывается, что законы Гаусса являются единственными разложимыми законами распределения, все компоненты которых принадлежат к их же типу; в пятом параграфе доказывается, что характеристические функции законов Гаусса и Пуассона являются единственными характеристическими функциями, имеющими бесконечное множество неэквивалентных делителей и обладающими тем свойством, что из каждой пары их делителей один какой-нибудь обязательно делится на другой (аналогия со степенями простых чисел!). В шестом параграфе доказываются с помощью метода характеристических функций три теоремы о разложении композиций нескольких законов Пуассона. Наконец, в седьмом параграфе показывается, что не все композиции (конечного числа) законов Пуассона принадлежат к классу C, и ставятся некоторые задачи, относящиеся к проблеме определения объема класса C.

* Настоящая работа была защищена автором в качестве кандидатской диссертации в начале января 1937 г. За время, истекшее до ее опубликования, появился ряд работ P. Lévy, в которых сообщаются теоремы, представляющие собой дальнейшее и притом значительное развитие некоторых из излагаемых здесь результатов.

** Теоремы § 1 были доказаны также (другим способом) P. Lévy, см. (³).

§ 1. Две теоремы из теории аналитических характеристических функций

Характеристические функции непрерывны. Если для закона распределения $F(x)$ существует абсолютный момент k-го порядка

$$E_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, dF(x),$$

то соответствующая этому закону характеристическая функция $f(t)$ имеет производные до k-го порядка включительно, причем

$$f^{(l)}(t) = i^l \int_{-\infty}^{\infty} x^l e^{itx} \, dF(x) \quad (l \leqslant k),$$

так что, в частности,

$$f^{(l)}(0) = i^l \int_{-\infty}^{\infty} x^l \, dF(x).$$

ЛЕММА 1. *Из существования $f^{(2k)}(0)$ вытекает существование E_{2k}.*

Доказательство*. Для $k = 0$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для $k = 0, 1, \ldots, n$; докажем его для $k = n+1$. Имеем

$$f^{(2n)}(t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{itx} \, dF(x),$$

откуда

$$f^{(2n+2)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(2n)}(h) + f^{(2n)}(-h) - 2f^{(2n)}(0)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \frac{e^{ihx} + e^{-ihx} - 2}{h^2} \, dF(x) =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+2} \frac{1 - \cos hx}{(hx)^2/2} \, dF(x).$$

В виду неотрицательности подинтегрального выражения можно перейти к пределу под знаком интеграла, т. е. интеграл от предельного выражения существует. Мы получаем тогда

$$f^{(2n+2)}(0) = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+2} \, dF(x)$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если $F_1(x)$ компонента $F(x)$ и для некоторого $v \gtrless 0$ существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} \, dF(x)$, то для этого v существует так-*

---

* См. P. Lévy, Calcul des probabilités, pp. 174—175, Paris 1925.

же интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_1(x)$, *причем можно указать такие* $a \geqslant 0$ *и* $C > 0$, *не зависящие от* v, *что выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_1(x) \leqslant Ce^{a|v|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF(x). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y).$$

Прежде всего замечаем, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{-B} F_1(x-y)\, dF_2(y)$ и $\int\limits_{B}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y)$, $B > 0$, представляют собой неубывающие функции от x при любом B. Поэтому $F(x)$ растет нигде не медленнее, чем $\int\limits_{-B}^{B} F_1(x-y)\, dF_2(y)$,

$$dF(x) \geqslant d \int\limits_{-B}^{B} F_1(x-y)\, dF_2(y).$$

Отсюда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF(x) \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, d \int\limits_{-B}^{B} F_1(x-y)\, dF_2(y) \geqslant \int\limits_{-A}^{A} e^{vx}\, d \int\limits_{-B}^{B} F_1(x-y)\, dF_2(y) =$$

$$= \int\limits_{-B}^{B} dF_2(y) \int\limits_{-A}^{A} e^{vx}\, dF_1(x-y)\, {}^* =$$

$$= \int\limits_{-B}^{B} e^{vy} dF_2(y) \int\limits_{-A-y}^{A-y} e^{vz} dF_1(z) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{-B}^{B} e^{vy} dF_2(y) \int\limits_{-A+B}^{A-B} e^{vz} dF_1(z).$$

Беря теперь сначала $A \to \infty$, а затем $B \to \infty$, получаем, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_1(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_2(x)$ конечны, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_1(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF_2(x) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx} dF(x)$$

---

* Вследствие конечности пределов интеграции перестановка порядка интегрирования законна.

(на самом деле имеет место равенство, но сейчас это для нас не важно). Теперь, если v положительно, то берем такое a_+, чтобы $F(a_+)$ было меньше единицы, если же v отрицательно, то берем такое a_-, чтобы $F(a_-)$ было больше нуля. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\,dF_2(x) \geqslant \begin{cases} \int_{a_+}^{\infty} e^{vx}\,dF_2(x) \geqslant e^{a_+v}\,[1-F_2(a_+)] & (v>0), \\ \int_{-\infty}^{a_-} e^{vx}dF_2(x) \geqslant e^{a_-v}F_2(a_-) & (v<0). \end{cases}$$

Полагая

$$1-F_2(a_+)=\frac{1}{C_+},\ F_2(a_-)=\frac{1}{C_-},\ \max(|a_+|,|a_-|)=a,\ \max(C_+,C_-)=C,$$

получаем, что для всех v

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\,dF_1(x) \leqslant C_\pm e^{-a_\pm v}\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\,dF(x) \leqslant Ce^{a|v|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\,dF(x).$$

ТЕОРЕМА I. *Если характеристическая функция $f(t)$, соответствующая закону распределения $F(x)$, регулярна в круге $|t|<R$, то она регулярна во всей полосе $-R<\Im t<R$ и представляется в этой полосе интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$.*

Доказательство. Достаточно доказать существование интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\,dF(x)$ для всех v из интервала $-R<v<R$. Действительно, отсюда легко можно будет вывести (хотя бы путем дифференцирования), что функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u+iv)x}\,dF(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}e^{iux}\,dF(x)$$

существует и голоморфна в указанной полосе; совпадая с $f(t)$ на вещественной оси, она будет совпадать с ней и в круге $|t|<R$ и, следовательно, осуществлять аналитическое продолжение $f(t)$ на всю полосу $-R<\Im t<R$.

Рассмотрим сначала случай, когда $F(x)$ симметричный закон распределения. Так как $f(t)$ в окрестности точки $t=0$ регулярна, то все ее производные в этой точке существуют, причем в силу четности $f(t)$ все производные нечетных порядков равны нулю, так что мы имеем

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\,t^{2k}\quad (|t|<R). \tag{2}$$

С другой стороны, в силу леммы 1 все E_{2k} существуют и

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k E_{2k} = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x). \tag{3}$$

Полагая в (2) $t = iv$ $(-R < v < R)$ и подставляя вместо $f^{(2k)}(0)$ ее значение из (3), получаем

$$f(iv) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(vx)^{2k}}{(2k)!}\, dF(x).$$

Но вследствие неотрицательности всех подынтегральных выражений можно переменить порядок суммирования и интегрирования. Мы получаем тогда

$$f(iv) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(vx)^{2k}}{(2k)!}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vx} + e^{-vx}}{2}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF(x),$$

т. е. последний интеграл существует. Это завершает доказательство теоремы I для случая симметричных законов распределения.

Пусть теперь $F(x)$ произвольный закон распределения. Характеристическая функция $f^*(t) = f(t) f(-t)$, соответствующая симметризованному закону $F^*(x) = F(x) * \overline{F}(x)$, будет, очевидно, регулярна в том же круге $|t| < R$. По доказанному, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF^*(x)$ для значений v из интервала $-R < v < R$ существует. Но тогда в силу леммы 2 для тех же значений v будет существовать и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF(x)$. Тем самым теорема I полностью доказана.

ТЕОРЕМА II. *Если характеристическая функция $f(t)$ регулярна в полосе $-R < \mathfrak{J}t < R$, то и каждый ее делитель $f_1(t)$ регулярен в этой полосе, причем соотношение $f(t) = f_1(t) f_2(t)$, имеющее место для вещественных t, сохраняет силу во всей полосе.*

Доказательство. Пусть характеристическим функциям $f(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствуют законы распределения $F(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$, $F(x) = F_1(x) * F_2(x)$. По теореме I интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF(x)$ существует для всех v из интервала $-R < v < R$. По лемме 2 для тех же значений v существуют и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF_1(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} dF_2(x)$. А отсюда, согласно замечанию, сделанному в начале доказательства предыдущей теоремы, вытекает регулярность

$f_1(t)$ и $f_2(t)$ в полосе $-R < \Im t < R$. Так как $f(t)$ и $f_1(t) f_2(t)$ аналитические функции, регулярные в указанной полосе и совпадающие на вещественной оси, то они должны совпадать во всей полосе.

Следствие. *Если $f(t)$ целая характеристическая функция, то и каждый ее делитель $f_1(t)$ является целой функцией, причем для всех t $(= u + iv)$ имеет место неравенство*

$$|f_1(t)| \leqslant f_1(iv) \leqslant Ce^{a|v|} f(iv), \tag{4}$$

где $a \geqslant 0$ и $C > 0$ не зависят от t.

Доказательство вытекает из теоремы II и неравенства (1).

§ 2. Доказательство теоремы H. Cramér'а о разложении законов Гаусса

Нормальными законами распределения или законами Гаусса называются функции распределения $G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$, $\sigma \geqslant 0$, $\alpha \gtreqless 0$, где

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Случаю $\sigma = 0$ соответствуют единичные законы распределения $\varepsilon(x - \alpha)$.

Точная формулировка теоремы H. Cramér'а такова:

Интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right), \tag{1}$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, имеет лишь решения

$$F_1(x) = G\left(\frac{x-\alpha_1}{\sigma_1}\right), \quad F_2(x) = G\left(\frac{x-\alpha_2}{\sigma_2}\right),$$

причем постоянные α_1, α_2 и σ_1, σ_2 связаны соотношениями

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

При $\sigma = 0$ теорема тривиальна. Пусть $\sigma > 0$. Произведя в (1) замену переменных $x = \sigma\xi + \alpha$, $y = \sigma\eta$, получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_1(\xi - \eta)\, d\tilde{F}_2(\eta) = G(\xi),$$

где $\tilde{F}_1(x) = F_1(\sigma x + \alpha)$, $\tilde{F}_2(x) = F_2(\sigma x)$, так что F_1 и $\tilde{F}_1$ (равно как и F_2 и $\tilde{F}_2$) либо одновременно гауссовские законы распреде-

ления, либо одновременно не гауссовские. Таким образом можно ограничиться рассмотрением уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = G(x), \tag{2}$$

получающегося из (1) при $\alpha = 0$, $\sigma = 1$.

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ характеристические функции, соответствующие законам распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, удовлетворяющим уравнению (2), и $f(t)$ характеристическая функция, соответствующая закону Гаусса $G(x)$. Как известно, $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, т. е. является целой функцией. В силу следствия из теорем § 1, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ также будут целыми функциями*. Так как $f(t)$ не имеет нулей и $f_1(t)f_2(t) = f(t)$, то $f_1(t)$ и $f_2(t)$ также не будут иметь нулей. Таким образом

$$f_1(t) = e^{g_1(t)},$$

где $g_1(t)$ — целая функция. В силу неравенства (1) § 1 имеем

$$|f_1(t)| \leqslant Ce^{a|v|}\,|f(iv)| = Ce^{a|v|}e^{\frac{v^2}{2}} \leqslant C_1e^{|t|^2}.$$

Это показывает, что порядок $f_1(t)$ не превышает 2. Согласно известной теореме Адамара $g_1(t)$ должно быть тогда полиномом не более чем второй степени:

$$g_1(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2.$$

Дело сводится к определению коэффициентов этого полинома. Так как $f_1(0) = 1$, то a_0 можно считать равным нулю. Далее, для вещественных t имеем $\overline{f_1(t)} = f_1(-t)$, откуда в силу равенства $a_0 = 0$ получаем $\overline{g_1(t)} = g_1(-t)$. Отсюда вытекает, что a_1 чисто мнимо, $a_1 = i\alpha_1$, $\alpha_1 \gtreqless 0$, и a_2 вещественно. Наконец, для вещественных t $|f_1(t)| = e^{a_2t^2} \leqslant 1$, а потому a_2 неположительно, $a_2 = -\frac{\sigma_1^2}{2}$, $\sigma_1 \geqslant 0$. В итоге

$$f_1(t) = e^{i\alpha_1t - \frac{\sigma_1^2}{2}t}.$$

Аналогично,

$$f_2(t) = e^{i\alpha_2t - \frac{\sigma_2^2}{2}t}.$$

* Собственно, в рассматриваемом случае можно обойтись без помощи общих теорем § 1. Существование интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}dG(x)$ для всех v легко проверить непосредственным подсчетом. В силу леммы 2 § 1 тогда существуют для всех v и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF_1(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx}\, dF_2(x)$, а это и показывает, что $f_1(t)$ и $f_2(t)$ целые функции.

Отсюда

$$F_1(x) = G\left(\frac{x-\alpha_1}{\sigma_1}\right), \quad F_2(x) = G\left(\frac{x-\alpha_2}{\sigma_2}\right),$$

где в силу соотношения $f_1(t) f_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ имеем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$. Формулы решения для общего уравнения (1) получаются отсюда уже без всякого труда.

§ 3. Доказательство теоремы о разложении законов Пуассона

Законами Пуассона называются функции распределения

$$F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}; \lambda\right), \quad \sigma > 0, \quad \alpha \gtreqless 0, \quad \lambda \geqslant 0,$$

где

$$F(x; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k \leqslant x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

(при $x < 0$ сумма пуста и $F(x; \lambda) = 0$). $F(x; \lambda)$ соответствует так называемому предельному распределению Пуассона, при котором случайная величина может принимать лишь целые неотрицательные значения k с вероятностями $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. При $\lambda = 0$ получаем единичные законы распределения $\varepsilon(x-\alpha)$.

ТЕОРЕМА. *Интегральное уравнение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}; \lambda\right), \tag{1}$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, имеет лишь решения

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\alpha-\beta}{\sigma}; \mu\right), \quad F_2(x) = F\left(\frac{x-\alpha+\beta}{\sigma}; \nu\right),$$

где $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, $\mu + \nu = \lambda$ и β — произвольное вещественное число.

Случай $\lambda = 0$ тривиален и мы его отбросим. Далее, так же, как и в случае разложения законов Гаусса, убеждаемся, что можно ограничиться рассмотрением уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = F(x; \lambda), \tag{2}$$

получающегося из (1) при $\alpha = 0$, $\sigma = 1$.

Прежде всего исследуем структуру функций F_1 и F_2. Именно, исходя из того, что $F(x; \lambda)$ растет лишь в точках $k = 0, 1, 2, \ldots$ *, покажем, что $F_1(x)$ может расти лишь в точках $\beta + k$, а $F_2(x)$ — лишь в точках $-\beta + k$, где β — первая точка роста $F_1(x)$, а $-\beta$

* a называется точкой роста $F(x)$, если $F(a+\varepsilon) - F(a-\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon > 0$.

тогда первая точка роста $F_2(x)$. Для этого докажем предварительно следующую лемму:

ЛЕММА. *Пусть $H_1(x) * H_2(x) = H(x)$ (H_1, H_2 и H — функции распределения). Тогда 1° если a точка роста $H_1(x)$ и b точка роста $H_2(x)$, то $a+b$ будет точкой роста $H(x)$; 2° если a и b первые точки роста $H_1(x)$ и $H_2(x)$, то $a+b$ будет первой точкой роста $H(x)$.*

Доказательство основывается на следующих двух неравенствах:

$$\left.\begin{array}{c}[H_1(\xi)-H_1(x)][H_2(\eta)-H_2(y)] \leqslant H(\xi+\eta)-H(x+y) \\ (\xi > x, \quad \eta > y),\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$H(x+y) \leqslant H_1(x) + H_2(y). \quad (4)$$

Эти неравенства имеют очевидный теоретико-вероятностный смысл. Пусть X случайная величина, распределенная по закону $H_1(x)$, и Y случайная величина, распределенная по закону $H_2(x)$ и не зависящая от X, так что сумма их $X+Y$ распределена по закону $H(x)$. Тогда левая часть (3) представляет собой вероятность одновременного выполнения неравенств $x < X \leqslant \xi$, $y < Y \leqslant \eta$, а правая—вероятность выполнения неравенства $x+y < X+Y \leqslant \xi+\eta$. Но из наличия первого события с необходимостью вытекает наличие второго; поэтому вероятность первого не превышает вероятности второго, что и утверждается в (3). Далее, левая часть (4) представляет собой вероятность выполнения неравенства $X+Y \leqslant$ $\leqslant x+y$, а правая не меньше вероятности выполнения по крайней мере одного из неравенств $X \leqslant x$, $Y \leqslant y$. Так как из первого события с необходимостью вытекает наличие второго, то снова вероятность первого не превышает вероятности второго, что и утверждается в (4)*.

Полагая теперь в (3) $\xi = a+\varepsilon$, $x = a-\varepsilon$, $\eta = b+\varepsilon$, $y = b-\varepsilon$, где a — точка роста $H_1(x)$, b — точка роста $H_2(x)$ и $\varepsilon > 0$, получаем:

$$H(a+b+2\varepsilon) - H(a+b-2\varepsilon) \geqslant$$
$$\geqslant [H_1(a+\varepsilon) - H_1(a-\varepsilon)][H_2(b+\varepsilon) - H_2(b-\varepsilon)] > 0.$$

В виду произвольности ε это и доказывает первую часть леммы. Пусть, далее, a и b первые точки роста $H_1(x)$ и $H_2(x)$, так что $H_1(a-\varepsilon) = H_2(b-\varepsilon) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Тогда, полагая в (4) $x = a-\varepsilon$, $y = b-\varepsilon$, получаем

$$H(a+b-2\varepsilon) \leqslant H_1(a-\varepsilon) + H_2(b-\varepsilon) = 0.$$

Таким образом, левее $a+b$ точек роста $H(x)$ нет, само же $a+b$ в силу первой части леммы является точкой роста $H(x)$; тем самым доказана и вторая часть леммы.

---

* Разумеется, можно провести доказательство неравенств (3) и (4) и чисто аналитическим путем. Эти неравенства не независимы: (4) вытекает из (3); (4) можно заменить более точным неравенством

$$H(x+y) \leqslant H_1(x) + H_2(y) - H_1(x) H_2(y).$$

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения о структуре функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Пусть γ какая-нибудь точка роста $F_2(x)$. Тогда в силу первой части леммы для всякой точки x роста $F_1(x)$ будем иметь $x+\gamma=k$ (где k — некоторое неотрицательное целое число). Таким образом, $F_1(x)$ может расти лишь в точках $x=-\gamma+k$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Аналогично, $F_2(x)$ может расти лишь в точках $x=-\beta+k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, где β — какая-нибудь точка роста $F_1(x)$. Отсюда прежде всего заключаем, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют конечные (т. е. отличные от $-\infty$) первые точки роста. Пусть это будут как раз точки β и γ. Так как первой точкой роста $F(x;\lambda)$ является 0, то в силу второй части леммы получаем $\beta+\gamma=0$ или $\gamma=-\beta$. Тем самым наше утверждение о структуре $F_1(x)$ и $F_2(x)$ полностью доказано.

Теперь без какого бы то ни было ограничения общности можно предположить, что $\beta=0$, ибо уравнение (2) не нарушится и интересующий нас характер входящих в него функций не изменится, если $F_1(x)$ заменить через $F_1(x+\beta)$, а $F_2(x)$—через $F_2(x-\beta)$. Мы получим тогда, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ могут расти лишь в точках $k=0, 1, 2, \ldots$, причем в $k=0$ обе действительно растут. Таким образом можно положить $F_1(x)=\sum\limits_{k\leqslant x} a_k$, $a_0>0$, $a_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k=1$, и $F_2(x)=\sum\limits_{k\leqslant x} b_k$, $b_0>0$, $b_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k=1$.

Обратимся к рассмотрению производящих функций, соответствующих законам распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F(x;\lambda)$. *Производящей функцией* для случайной величины, могущей принимать лишь целые неотрицательные значения k с вероятностями p_k, $p_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k=1$, называется по Лапласу сумма степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, сходящегося в круге $|z|\leqslant 1$. Как и характеристические функции, производящие функции при компонировании соответствующих им законов распределения перемножаются (это видно хотя бы из того, что они получаются из характеристических путем замены e^{it} на z).

Производящими функциями, соответствующими законам распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F(x;\lambda)$, будут

$$\varphi_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\quad \varphi_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad \text{и} \quad \varphi(z;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^k=e^{\lambda(z-1)},$$

причем

$$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z)=e^{\lambda(z-1)}. \tag{5}$$

Так как $a_0 b_k + \ldots + a_k b_0 = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, то $a_k \leqslant \frac{1}{b_0} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \leqslant \frac{1}{b_0} e^{\lambda(z-1)} \tag{6a}$$

для всех положительных значений z. Аналогично,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \leqslant \frac{1}{a_0} e^{\lambda(z-1)} \tag{6б}$$

для всех положительных значений z. Таким образом $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ являются целыми функциями, и притом не выше чем первого порядка, как показывают неравенства (6), и без нулей, как показывает соотношение (5).

В силу теоремы Адамара имеем поэтому

$$\varphi_1(z) = e^{\mu z + \gamma},$$

причем коэффициенты μ и γ, очевидно, вещественны. Остается лишь ближе определить эти коэффициенты. Так как для положительных значений z $\varphi_1(z) \geqslant a_0 > 0$, то $\mu \geqslant 0$. С другой стороны, так как $\varphi_1(1) = 1$, то $\gamma = -\mu$. В итоге имеем

$$\varphi_1(z) = e^{\mu(z-1)} \quad (\mu \geqslant 0).$$

Аналогично,

$$\varphi_2(z) = e^{\nu(z-1)} \quad (\nu \geqslant 0),$$

причем в силу соотношения (5) $\mu + \nu = \lambda$. Возвращаясь к функциям распределения, получаем

$$F_1(x) = F(x; \mu), \quad F_2(x) = F(x; \nu),$$

и общее решение уравнения (2) будет

$$F_1(x) = F(x - \beta; \mu), \quad F_2(x) = F(x + \beta; \nu).$$

Отсюда для общего решения уравнения (1) без труда получается вид, указанный в формулировке теоремы.

§ 4. Одно характеристическое свойство законов Гаусса

Так как все нормальные законы распределения принадлежат к типу любого из них, то теорему H. Cramér'a можно также выразить следующим образом:

Всякая компонента нормального закона распределения принадлежит к типу этого закона.

В настоящем параграфе я доказываю, что это предложение выражает характеристическое свойство нормальных законов распределения. Именно, справедлива следующая т рема:

Если всякая компонента разложимого закона распределения $F(x)$ принадлежит к типу этого закона, то $F(x)$ закон Гаусса.

Или, в терминах характеристических функций:

Если всякий делитель разложимой характеристической функции $f(t)$ принадлежит к типу этой функции, то $f(t)$ «нормальная» характеристическая функция, $f(t) = e^{i\alpha t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Эта теорема, дополняя теорему H. Cramér'a, вместе с тем опирается на нее, поскольку последняя утверждает, что законы Гаусса действительно обладают указанным свойством.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $f(t)$ безгранично делима. Безгранично делимой характеристической функцией мы будем называть характеристическую функцию безгранично делимого закона распределения, т. е. функцию, являющуюся n-ой степенью характеристической функции для произвольно больших значений n*. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться специальным символом $\sim$ для обозначения эквивалентности характеристических функций.

Пусть

$$f(t) \sim f(\sigma t) f(\sigma' t) \tag{1}$$

собственное разложение $f(t)$ (по предположению, одно по крайней мере такое разложение существует). Разлагая каждый множитель в правой части формулы (1) по той же формуле, получаем

$$f(t) \sim f(\sigma^2 t) f(\sigma' \sigma t) f(\sigma\sigma' t) f(\sigma'^2 t),$$

следовательно $\{ f(\sigma\sigma' t) \}^2$ является делителем $f(t)$. Но тогда, по основному свойству функции $f(t)$,

$$\{ f(\sigma\sigma' t) \}^2 \sim f(\gamma t)$$

для некоторого $\gamma > 0$. Следовательно,

$$f(t) \sim \left\{ f\left(\frac{\sigma\sigma'}{\gamma} t \right) \right\}^2,$$

т. е. $f(t)$ есть квадрат характеристической функции. Так как в фигурных скобках стоит функция того же класса $f(t)$, то, применяя индукцию, получаем, что $f(t)$ есть 2^k-ая степень характери-

---

* Обычно требуют выполнения указанного свойства для всех целых положительных значений n, однако фактически при построении теории безгранично делимых законов распределения это требование не используется; опираются лишь на то, что n может быть произвольно большим, хотя бы a priori оно и принадлежало к сколь угодно редкой последовательности; то же, что указанное свойство имеет место даже для всех вообще вещественных n, получается как следствие.

стической функции для любого целого положительного k. Этим и доказывается наше утверждение, что $f(t)$ безгранично делима.

Как показал P. Lévy (2) *, всякая безгранично делимая характеристическая функция может быть представлена в виде

$$f(t) \sim \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u)\right), \qquad (2)$$

где $G(u)$ — некоторая неубывающая функция с ограниченным изменением, с точностью до аддитивной постоянной определяемая функцией $f(t)$. Обратно, заданием произвольной неубывающей функции $G(u)$ с ограниченным изменением определяется, с точностью до эквивалентности, некоторая характеристическая функция $f(t)$. В частности, нормальные характеристические функции получаются в том (и только в том) случае, когда $G(u)$ имеет своей единственной точкой роста $u = 0$. Единичные характеристические функции получаются лишь если $G(u)$ постоянная.

Нам нужно показать, что если $f(t)$ удовлетворяет условию теоремы, то $G(u)$ в представлении (2) функции $f(t)$ может расти лишь в точке $u = 0$. Пусть это не верно и $G(u)$ растет в некоторой точке $u = a \neq 0$. Покажем, что в таком случае $G(u)$ никаких других точек роста иметь не может; тогда нетрудно будет обнаружить, что $f(t)$ совсем не имеет собственных разложений вида (1), в противоречие с условием теоремы.

Пусть ε столь мало, что $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$ имеют тот же знак, что и a. Рассмотрим функцию

$$H_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < a - \varepsilon, \\ \frac{1}{2}\{G(u) - G(a-\varepsilon)\} & \text{»} \quad a - \varepsilon \leqslant u < a + \varepsilon, \\ \frac{1}{2}\{G(a+\varepsilon) - G(a-\varepsilon)\} & \text{»} \quad a + \varepsilon \leqslant u, \end{cases}$$

очевидно, неубывающую и имеющую ограниченное положительное изменение. Теми же свойствами будет обладать и функция $G(u) - H_\varepsilon(u)$. Поэтому

$$\varphi(t) \sim \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2} \, dH_\varepsilon(u)\right)$$

будет собственным делителем $f(t)$ и, значит,

$$\varphi(t) \sim f\left(\frac{t}{\sigma}\right),$$

* Я пользуюсь здесь, как и в следующем параграфе, формулой P. Lévy в той форме, какую ей придал А. Я. Хинчин (6).

где $\sigma > 0$ зависит от ε. Отсюда получаем, обозначая символом $\sim$ равенство с точностью до слагаемого вида iat,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dH_\varepsilon(u)=\ln\varphi(t)\sim\ln f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\sim$$

$$\sim\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\frac{t}{\sigma}u}-1-\frac{i\frac{t}{\sigma}u}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itv}-1-\frac{itv}{1+\sigma^2v^2}\right)\frac{1+\sigma^2v^2}{\sigma^2v^2}dG(\sigma v)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itv}-1-\frac{itv}{1+v^2}\right)\frac{1+v^2}{v^2}\,\frac{1+\sigma^2v^2}{\sigma^2(1+v^2)}dG(\sigma v)+$$

$$+it\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{v}{1+v^2}-\frac{v}{1+\sigma^2v^2}\right)\frac{1+\sigma^2v^2}{\sigma^2v^2}dG(\sigma v)\sim$$

$$\sim\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,\frac{1+\sigma^2u^2}{\sigma^2(1+u^2)}dG(\sigma u).$$

Сравнение первого и последнего интегралов показывает, что

$$H_\varepsilon(u)=C+\int^{u}\frac{1+\sigma^2v^2}{\sigma^2(1+v^2)}dG(\sigma v).$$

Но $H_\varepsilon(u)$ может расти лишь в интервале $[a-\varepsilon,\ a+\varepsilon]$. Поэтому $G(u)$ может расти лишь в интервале $[\sigma(a-\varepsilon),\ \sigma(a+\varepsilon)]$. Так как по предположению в точке a $G(u)$ растет, то имеем $\sigma(a-\varepsilon)\leqslant$ $\leqslant a\leqslant\sigma(a+\varepsilon)$, откуда для положительных a

$$\frac{a}{a+\varepsilon}\leqslant\sigma\leqslant\frac{a}{a-\varepsilon}, \tag{3а}$$

а для отрицательных a

$$\frac{a}{a-\varepsilon}\leqslant\sigma\leqslant\frac{a}{a+\varepsilon}. \tag{3б}$$

Пусть теперь $\varepsilon\to 0$. Как показывают неравенства (3), σ при этом стремится к единице, так что границы $\sigma(a-\varepsilon)$ и $\sigma(a+\varepsilon)$ интервала, в котором $G(u)$ может расти, обе стягиваются к точке a. Следовательно, $G(u)$ растет только в точке a.

Остается показать, что в таком случае $f(t)$ не имеет собственных разложений вида

$$f(t)\sim f(\sigma t)f(\sigma' t). \tag{4}$$

Пусть $G(u)$ делает в a скачок $\frac{\lambda a^2}{1+a^2}$, $\lambda>0$. Имеем

$$f(t)\sim\exp\left\{\left(e^{ita}-1-\frac{ita}{1+a^2}\right)\frac{1+a^2}{a^2}\,\frac{\lambda a^2}{1+a^2}\right\}\sim e^{\lambda(e^{ita}-1)}.$$

Из (4) следовало бы тогда, что

$$\lambda(e^{ita}-1)=iat+\lambda(e^{ia\sigma t}-1)+\lambda(e^{ia\sigma' t}-1).$$

Но нетрудно видеть, что такое равенство возможно лишь если $\alpha=0$, одно из чисел σ, σ' равно единице, а другое — нулю, т. е., если (4) — несобственное разложение.

Итак, осталась единственная возможность: $G(u)$ растет лишь в точке $u=0$. Пусть скачок ее в этой точке равен σ^2. Так как, при $u\to 0$, $\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}=-\frac{t^2}{2}+O(u)$, то $f(t)\sim e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$. Что такая характеристическая функция действительно удовлетворяет условию теоремы, как раз показывает теорема H. Cramér'a.

§ 5. Одно характеристическое свойство законов Гаусса и Пуассона

Возникает вопрос о нахождении признака, выделяющего из всех законов распределения одновременно законы Гаусса и законы Пуассона (а также законы, сопряженные с законами Пуассона). Таким общим признаком, конечно, не может служить то, что эти законы содержат в качестве компонент только «себе подобные»—во-первых, вследствие неопределенности такого рода выражения, во-вторых, потому, что существуют и другие классы законов, обладающие аналогичным свойством (см. §§ 6 и 7).

Оказывается, что законы Гаусса и Пуассона (а также сопряженные с пуассоновскими) можно выделить чисто арифметическим характеристическим признаком, показывающим, что их можно рассматривать как аналоги степеней простых чисел.

ТЕОРЕМА. *Если характеристическая функция $f(t)$ имеет бесконечное множество неэквивалентных делителей и из любых двух ее делителей один какой-нибудь обязательно делится на другой, то $f(t)$ является характеристической функцией либо закона Гаусса, либо закона Пуассона, либо закона, сопряженного с законом Пуассона.*

Предпошлем доказательству этой теоремы две элементарные леммы.

ЛЕММА А*. *Если $f(t)$ не единичная характеристическая функция, то существует такое $\delta>0$, что для всех вещественных t, удовлетворяющих условию $0<|t|<\delta$, выполняется неравенство $|f(t)|<1$.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ закон распределения, соответствующий характеристической функции $f(t)$. Имеем

$$f^*(t)=|f(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,dF^*(x). \tag{1}$$

* Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, теорема 12, ОНТИ 1938.

Так как по предположению $F(x)$ не единичный закон, то, как легко следует из леммы § 3, $F^*(x)$ имеет по крайней мере одну точку роста $x = a \neq 0$. Но тогда из формулы (1) явствует, что $f^*(t)$, а значит, и $|f(t)|$, может быть равно единице лишь когда $ta = 2k\pi$ или $t = \frac{2k\pi}{a}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следовательно, для значений t, отличных от нуля и меньших по модулю, чем $\frac{2\pi}{|a|}$, $|f(t)|$ меньше единицы, что и требовалось доказать.

ЛЕММА В. *Если некоторая характеристическая функция $f(t)$ делится на любую целую степень характеристической функции $\varphi(t)$, то $\varphi(t)$ единичная характеристическая функция.*

Доказательство. Имеем

$$f(t) = \varphi^n(t)\,\psi_n(t) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда

$$|f(t)| \leqslant |\varphi(t)|^n |\psi_n(t)| \leqslant |\varphi(t)|^n. \tag{2}$$

Пусть $\varphi(t)$ не единичная характеристическая функция. Тогда по лемме А существует такое δ, что $|\varphi(t)| < 1$ для $0 < |t| < \delta$. Беря в (2) $n \to \infty$, получаем, что для указанных значений t должно быть $f(t) = 0$. Но этого не может быть, ибо $f(t)$, как характеристическая функция, непрерывна и в точке $t = 0$ равна единице.

Перейдем к доказательству теоремы. Покажем прежде всего, что $f(t)$ не имеет простых делителей. Пусть это неверно, и $f(t)$ имеет простой делитель $f_1(t)$. Тогда всякий другой делитель $\varphi(t)$ функции $f(t)$ будет эквивалентен некоторой степени $f_1(t)$. Действительно, согласно условию теоремы, $\varphi(t)$ будет во всяком случае делиться на $f_1(t)$. Пусть $f_1^n(t)$ наибольшая степень $f_1(t)$, на которую еще делится $\varphi(t)$ (в силу леммы В такая наибольшая степень необходимо существует), и $\varphi(t) = f_1^n(t)\,\psi(t)$. Так как $\psi(t)$ уже не делится на $f_1(t)$, то, наоборот, $f_1(t)$ должно делиться на $\psi(t)$, т. е., в силу простоты $f_1(t)$, $\psi(t)$ единичная характеристическая функция и, значит, $\varphi(t) \sim f_1^n(t)$. Но теперь в силу той же леммы В $f(t)$ не может содержать делителей $\varphi(t) \sim f_1^n(t)$ с произвольно большими n. Таким образом число неэквивалентных делителей $f(t)$ оказывается ограниченным, в противоречие с предположением теоремы. Следовательно, $f(t)$ не имеет простых делителей.

Но, как доказал А. Я. Хинчин ([5]), всякая характеристическая функция, не имеющая простых делителей, безгранично делима (по поводу безгранично делимых характеристических функций см. предыдущий параграф). Таким образом, $f(t)$ безгранично делима и мы имеем согласно формуле P. Lévy

$$f(t) \sim \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right).$$

Теперь уже нетрудно видеть, что $G(u)$ должно иметь только одну точку роста. Действительно, пусть это неверно и $G(u)$ растет в точках a и b, $a < b$. Выберем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $a+\varepsilon < b-\varepsilon$, и построим функции

$$H_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < a-\varepsilon, \\ G(u)-G(a-\varepsilon) & \text{»} \quad a-\varepsilon \leqslant u < a+\varepsilon, \\ G(a+\varepsilon)-G(a-\varepsilon) & \text{»} \quad a+\varepsilon \leqslant u \end{cases}$$

и

$$H_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < b-\varepsilon, \\ G(u)-G(b-\varepsilon) & \text{»} \quad b-\varepsilon \leqslant u < b+\varepsilon, \\ G(b+\varepsilon)-G(b-\varepsilon) & \text{»} \quad b+\varepsilon \leqslant u. \end{cases}$$

Характеристические функции

$$f_1(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dH_1(u)\right)$$

и

$$f_2(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dH_2(u)\right)$$

являются, очевидно, собственными делителями $f(t)$, ибо разности $G(u)-H_1(u)$ и $G(u)-H_2(u)$ суть неубывающие функции с положительными изменениями (первая растет в точке b, вторая — в точке a). По условию теоремы, одна какая-нибудь из $f_1(t)$, $f_2(t)$ должна делиться на другую. Пусть, скажем, $f_1(t)$ делится на $f_2(t)$. Тогда частное

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,d[H_1(u)-H_2(u)]\right),$$

являющееся делителем $f(t)$, должно быть также безгранично делимой характеристической функцией. Но этого не может быть, так как разность $H_1(u)-H_2(u)$, имея ограниченное изменение, не монотонна *. Таким образом $f_1(t)$ не делится на $f_2(t)$, и точно так же убеждаемся, что $f_2(t)$ не делится на $f_1(t)$. Но это противоречит условию теоремы.

* Если в формуле

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dH(u)\right)$$

$H(u)$ функция с ограниченным изменением, то $H(u)$ однозначно определяется (во всех своих точках непрерывности) заданием $\varphi(t)$. Поэтому $\varphi(t)$ может быть безгранично делимой характеристической функцией лишь если $H(u)$ функция неубывающая.

Итак, $G(u)$ должно иметь лишь одну точку роста. Но в этом случае $f(t)$ будет характеристической функцией либо закона Гаусса, либо закона Пуассона, либо закона, сопряженного с законом Пуассона. Что такие характеристические функции действительно обладают свойством, требуемым в условии теоремы, как раз показывают теоремы §§ 2 и 3.

§ 6. О разложении композиций законов Пуассона

В настоящем параграфе мы покажем, что класс C не исчерпывается совокупностью законов Гаусса и Пуассона, а именно, он во всяком случае содержит два довольно обширных семейства композиций законов Пуассона.

Положительным модулем мы будем называть множество неотрицательных чисел, которое вместе с любыми двумя своими элементами содержит и их сумму.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *произвольные положительные числа,* $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k$, *и* $\Lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ *наименьший положительный модуль, содержащий эти числа, т. е. совокупность чисел* $l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2 + \ldots + l_k\sigma_k$, *где* $l_1, l_2, \ldots, l_k$ *независимо друг от друга, с единственным ограничением* $l_1 + l_2 + \ldots + l_k > 0$, *пробегают все целые неотрицательные значения; так как* $\Lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ *не имеет предельных точек на конечном расстоянии, то его можно расположить в возрастающую последовательность* $\Lambda_1 = \sigma_1 < \Lambda_2 < \ldots \ldots < \Lambda_n < \ldots$; *тогда характеристическая функция всякой компоненты закона распределения*

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1};\ \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2};\ \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k};\ \lambda_k\right)$$

$$(\gamma_j \gtreqless 0,\ \lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, k)$$

имеет вид

$$\exp\left(i\gamma t + \sum_{\Lambda_n \leqslant \sigma_k} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right), \tag{1}$$

где коэффициенты γ *и* α_{Λ_n} *вещественны.*

Предварительно докажем лемму, обобщающую известное неравенство, связывающее вещественную часть целой функции с коэффициентами ее степенного ряда *, на ряды Фурье целых почти периодических функций.

ЛЕММА. *Пусть* $h(t) \sim \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda) e^{i\lambda t}$ *целая почти периодическая функция и* $A(v) = \max_{-\infty<u<\infty} \Re h(u + iv)$. *Тогда для всех* v *имеет место неравенство*

$$|\alpha(\lambda) e^{-\lambda v} + \overline{\alpha(-\lambda)} e^{\lambda v}| \leqslant \max\{4A(v), 0\} - 2\Re\alpha(0). \tag{2}$$

* См., например, Titchmarsh, The theory of functions, p. 86.

Доказательство. Имеем

$$\Re h(u+iv)=\frac{1}{2}[h(u+iv)+\overline{h(u+iv)}]\sim$$

$$\sim\frac{1}{2}\left\{\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\alpha(\lambda)e^{-\lambda v}e^{i\lambda u}+\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\overline{\alpha(\lambda)}e^{-\lambda v}e^{-i\lambda u}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}(\alpha(\lambda)e^{-\lambda v}+\overline{\alpha(-\lambda)}e^{\lambda v})e^{i\lambda u}.$$

Отсюда

$$\alpha(\lambda)e^{-\lambda v}+\overline{\alpha(-\lambda)}e^{\lambda v}=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\Re h(u+iv)e^{-i\lambda u}du \tag{3}$$

и

$$\Re\alpha(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Re h(u+iv)\,du. \tag{4}$$

Из (3) получаем

$$|\alpha(\lambda)e^{-\lambda v}+\overline{\alpha(-\lambda)}e^{\lambda v}|\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T|\Re h(u+iv)|\,du,$$

что в соединении с (4) дает

$$|\alpha(\lambda)e^{-\lambda v}+\overline{\alpha(-\lambda)}e^{\lambda v}|+2\Re\alpha(0)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_0^T\{|\Re h(u+iv)|+\Re h(u+iv)\}\,du. \tag{5}$$

Но для тех значений u, при которых $\Re h(u+iv)$ отрицательно, $|\Re h(u+iv)|+\Re h(u+iv)=0$, для тех же, при которых $\Re h(u+iv)$ положительно, $|\Re h(u+iv)|+\Re h(u+iv)\leqslant 2A(v)$. Таким образом в обоих случаях

$$|\Re h(u+iv)|+\Re h(u+iv)\leqslant\max\{2A(v),0\}.$$

Подставляя это в (5), мы и получаем неравенство (2).

Доказательство теоремы 1. Компонируя обе части уравнения

$$F_1(x)*F_2(x)=F(x)$$

с $\varepsilon(x+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_k)$, мы приведем его к виду

$$F_1(x)*F_2(x)=F\left(\frac{x}{\sigma_1};\ \lambda_1\right)*F\left(\frac{x}{\sigma_2};\ \lambda_2\right)*\ldots*F\left(\frac{x}{\sigma_k};\ \lambda_k\right). \tag{6}$$

Правая часть уравнения (6), как это явствует хотя бы из рассмотрения ее характеристической функции

$$f(t)=f(\sigma_1 t;\lambda_1)f(\sigma_2 t;\lambda_2)\ldots f(\sigma_k t;\lambda_k)=\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e^{i\sigma_j t}-1)\right),$$

растет лишь в точках $0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ Как и в § 3, убеждаемся, что можно считать

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0 \\ a_0 + \sum\limits_{\Lambda_n \leqslant x} a_{\Lambda_n} & \text{» } x \geqslant 0 \end{cases} \quad a_0 > 0,\ a_{\Lambda_n} \geqslant 0,\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} = 1,$$

и аналогично

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0 \\ b_0 + \sum\limits_{\Lambda_n \leqslant x} b_{\Lambda_n} & \text{» } x \geqslant 0 \end{cases} \quad b_0 > 0,\ b_{\Lambda_n} \geqslant 0,\ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\Lambda_n} = 1.$$

Характеристические функции для $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будут, соответственно,

$$f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \quad \text{и} \quad f_2(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}.$$

Так как $f(t)$ целая функция, то на основании следствия теорем § 1 $f_1(t)$ и $f_2(t)$ также целые функции, причем для отрицательных v

$$|f_1(t)| = |f_1(u+iv)| \leqslant Ce^{a|v|} f(iv) =$$

$$= Ce^{a|v|} e^{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (e^{\sigma_j |v|} - 1)} < e^{C_1 e^{\sigma_k |v|}}. \tag{7}$$

Так как $f(t)$ не имеет нулей, то, в силу соотношения $f_1(t) f_2(t) = f(t)$, $f_1(t)$ также не имеет нулей. Отсюда

$$f_1(t) = e^{g_1(t)},$$

где $g_1(t)$ — целая функция, причем в силу равенства $f_1(0) = 1$ можно считать, что $g_1(0) = 0$.

Покажем, что $g_1(t)$ может быть представлена в виде

$$g_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\Lambda_n} (e^{i\Lambda_n t} - 1),$$

где коэффициенты α_{Λ_n} вещественны.

Из

$$e^{g_1(t)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}$$

получаем

$$g_1'(t) = i \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}}{a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}}. \tag{8}$$

Пусть $t = u + iv$. Для достаточно больших положительных значений v имеем $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{-\Lambda_n v} < a_0$ и

$$\frac{1}{f_1(t)} = \frac{1}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{a_0^{m+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}\right)^m =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \tag{9}$$

(все кратные чисел $\Lambda_1, \dots \Lambda_n, \dots$, равно как и всевозможные их суммы, также содержатся среди этих чисел). Так как $\frac{1}{f_1(t)}$ целая почти периодическая функция, то это разложение ее в ряд Фурье, установленное для $t = u + iv$ с достаточно большими положительными v, сохраняет силу для всех без исключения комплексных значений t. Подставляя (9) в (8) и производя перемножение, получаем

$$g_1'(t) = i \sum_{n=1}^{\infty} d_{\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t},$$

что после интегрирования дает

$$g_1(t) = i \sum_{n=1}^{\infty} d_{\Lambda_n} \frac{e^{i\Lambda_n t} - 1}{i\Lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\Lambda_n} (e^{i\Lambda_n t} - 1).$$

Вещественность коэффициентов α_{λ_n} явствует из выкладок.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что все α_{Λ_n} с $\Lambda_n > \sigma_k$ равны нулю. Из неравенства (7) следует, что для отрицательных v

$$A(v) = \max_{-\infty < u < \infty} \Re g_1(u + iv) < C_1 e^{\sigma_k |v|}.$$

Поэтому, применяя лемму, получаем для отрицательных v

$$|\alpha_{\Lambda_n}| e^{\Lambda_n |v|} < 4C_1 e^{\sigma_k |v|} - 2\alpha_0$$

$\left(\text{где } \alpha_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\Lambda_n}\right)$. Отсюда

$$|\alpha_{\Lambda_n}| < 4C_1 e^{(\sigma_k - \Lambda_n)|v|} - 2\alpha_0 e^{-\Lambda_n |v|}.$$

Если теперь $\Lambda_n > \sigma_k$, то при $v \to -\infty$ оба члена в правой части этого неравенства стремятся к нулю и мы получаем, что $\alpha_{\Lambda_n} = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ $(0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k)$ *линейно рационально независимы, т. е. не существует соотношения*

$$r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + \dots + r_k\sigma_k = 0 \quad (|r_1| + |r_2| + \dots + |r_k| > 0)$$

с рациональными $r_1, r_2, \ldots, r_k$, *то законы распределения*

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right)$$

имеют в качестве компонент только законы того же вида

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\delta_1}{\sigma_1}; \mu_1\right) * F\left(\frac{x-\delta_2}{\sigma_2}; \mu_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\delta_k}{\sigma_k}; \mu_k\right),$$

где $\delta_j \gtreqless 0$, $0 \leqslant \mu_j \leqslant \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 характеристическая функция всякой компоненты закона $F(x)$ имеет вид

$$f_1(t) = \exp\left(i\gamma t + \sum_{n=1}^{m} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right),$$

где все Λ_n вещественны и $\Lambda_m = \sigma_k$. Нужно доказать, что все $\alpha_{\Lambda_n} \geqslant 0$ и притом α_{Λ_n} может быть положительным лишь если Λ_n одно из чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$.

Прежде всего заметим, что если

$$\exp\left(i\gamma t + \sum_{n=1}^{r} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right)$$

разлагается в ряд Фурье с неотрицательными коэффициентами, то $\alpha_{\Lambda_r} \geqslant 0$. Действительно,

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{r} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{M_n} e^{iM_n t} \qquad (10)$$

($d_0 > 0$, $d_{M_n} \geqslant 0$, $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ — наименьший положительный модуль, содержащий числа $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$). Положим $t = -iv$, $v > 0$. Если бы α_{Λ_r} было отрицательно, то при $v \to \infty$ левая часть равенства (10) стремилась бы к нулю. Но это невозможно, так как правая часть остается во всяком случае большей, чем d_0.

Теперь, пусть $f(t)$ характеристическая функция, соответствующая закону распределения $F(x)$, и $f_2(t) = \frac{f(t)}{f_1(t)}$. Очевидно,

$$f_2(t) = \exp\left(i\delta t + \sum_{n=1}^{m} \beta_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right),$$

где $\alpha_{\Lambda_n} + \beta_{\Lambda_n} = \lambda_j$, если $\Lambda_n = \sigma_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ и $= 0$ в противном случае. В частности, $\alpha_{\Lambda_m} + \beta_{\Lambda_m} = \alpha_{\sigma_k} + \beta_{\sigma_k} = \lambda_k$ и $\alpha_{\sigma_k}, \beta_{\sigma_k}$, в соответствии со сделанным выше замечанием, неотрицательны. Рассмотрим коэффициенты $\alpha_{\Lambda_{m-1}}$ и $\beta_{\Lambda_{m-1}}$. Так как между σ_k, с одной стороны, и $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{m-1}$ — с другой, в силу предположения

теоремы не существует линейной рациональной зависимости, то ряд для функции

$$\left.\begin{aligned} &\exp\left(i\gamma t + \sum_{n=1}^{m-1} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right), \\ \text{соотв.}\quad &\exp\left(i\delta t + \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

входит без изменения составной частью в ряд для $f_1(t)$, соответственно, $f_2(t)$, т. е. представляет собой ряд Фурье с неотрицательными коэффициентами. Поэтому согласно сделанному выше замечанию $\alpha_{\Lambda_{m-1}}$ и $\beta_{\Lambda_{m-1}}$ неотрицательны. Если теперь $\Lambda_{m-1} > \sigma_{k-1}$, то $\alpha_{\Lambda_{m-1}} + \beta_{\Lambda_{m-1}} = 0$ и, значит, $\alpha_{\Lambda_{m-1}} = \beta_{\Lambda_{m-1}} = 0$. Тогда старшим коэффициентом в (11) служит $\alpha_{\Lambda_{m-2}}$, соответственно, $\beta_{\Lambda_{m-2}}$. Если и $\Lambda_{m-2} > \sigma_{k-1}$, то тем же способом заключаем, что $\alpha_{\Lambda_{m-2}} = \beta_{\Lambda_{m-2}} = 0$. Пусть $\Lambda_{m-l_1} = \sigma_{k-1}$; мы видим, что для всех n между m и $m - l_1$ $\alpha_{\Lambda_n} = \beta_{\Lambda_n} = 0$, а для $n = m - l_1$ $\alpha_{\Lambda_n} = \alpha_{\sigma_{k-1}} \geqslant 0$, $\beta_{\Lambda_n} = \beta_{\sigma_{k-1}} \geqslant 0$ и $\alpha_{\sigma_{k-1}} + \beta_{\sigma_{k-1}} = \lambda_{k-1}$. Так как теперь между σ_{k-1} и σ_k, с одной стороны, и $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{m-l_1-1}$ — с другой, не существует линейной рациональной зависимости, то ряд для

$$\exp\left(i\gamma t + \sum_{n=1}^{m-l_1-1} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right),$$

соотв.

$$\exp\left(i\delta t + \sum_{n=1}^{m-l_1-1} \beta_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right)$$

входит без изменения составной частью в ряд для $f_1(t)$, соответственно, $f_2(t)$, т. е. представляет собой ряд Фурье с неотрицательными коэффициентами. Поэтому $\alpha_{\Lambda_{m-l_1-1}}$ и $\beta_{\Lambda_{m-l_1-1}}$ неотрицательны. Так же, как и выше, получаем, что если $\Lambda_{m-l_1-1} > \sigma_{k-2}$, то $\alpha_{\Lambda_{m-l_1-1}} = \beta_{\Lambda_{m-l_1-1}} = 0$, а тогда $\alpha_{\Lambda_{m-l_1-2}}$ и $\beta_{\Lambda_{m-l_1-2}}$ неотрицательны. Продолжая то же рассуждение, мы найдем, что α_{Λ_n} неотрицательно для всех n и притом равно нулю для всех Λ_n, отличных от чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. Тем самым теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что условие линейной рациональной независимости отнюдь не является необходимым.

ТЕОРЕМА 3. *Законы распределения*

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1};\ \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2};\ \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k};\ \lambda_k\right),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ — *произвольные положительные числа, подчиненные условию*

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k \leqslant 2\sigma_1,$$

имеют в качестве компонент только законы того же вида

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\delta_1}{\sigma_1};\ \mu_1\right) * F\left(\frac{x-\delta_2}{\sigma_2};\ \mu_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\delta_k}{\sigma_k};\ \mu_k\right),$$

где $\delta_j \gtreqless 0$, $0 \leqslant \mu_j \leqslant \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 и условия $\sigma_k \leqslant 2\sigma_1$ характеристическая функция всякой компоненты закона распределения $F(x)$ имеет вид

$$f_1(t) = \exp\left(i\gamma t + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{\sigma_j}(e^{i\sigma_j t} - 1)\right),$$

где все α_{σ_j} вещественны. Но тогда в силу того же условия $\sigma_k \leqslant 2\sigma_1$ в ряде Фурье для $f_1(t)$ будут содержаться члены

$$\alpha_{\sigma_1} e^{i(\gamma+\sigma_1)t} + \alpha_{\sigma_2} e^{i(\gamma+\sigma_2)t} + \ldots + \alpha_{\sigma_k} e^{i(\gamma+\sigma_k)t}.$$

Так как $f_1(t)$ характеристическая функция, то все α_{σ_j} должны быть неотрицательными, а это и доказывает теорему.

§ 7. О классе законов распределения, не имеющих простых компонент

Как показал А. Я. Хинчин ([5]), все законы распределения, не имеющие простых компонент, т. е. законы распределения из класса C, безгранично делимы, и вместе с тем существуют безгранично делимые законы распределения, не принадлежащие к классу C, т. е. имеющие по крайней мере одну простую компоненту*. Возникает вопрос: какие именно безгранично делимые законы распределения принадлежат к классу C? В § 2 была доказана (по H. Cramér'y) принадлежность к классу C законов Гаусса $G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$; в § 3 то же было установлено для законов Пуассона $F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}; \lambda\right)$, значит, также для сопряженных с ними законов $\bar{F}\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}; \lambda\right)$. Наконец, в предыдущем параграфе мы доказали принадлежность к классу C законов распределения

$$\left.\begin{array}{c} F\left(\frac{x-\alpha_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\alpha_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\alpha_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right) \\ (0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k) \end{array}\right\} \quad (1)$$

---

* Существуют безгранично делимые законы распределения, которые целиком раскладываются на простые компоненты (в счетном числе). Таким является, например, закон распределения с характеристической функцией $f(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{it}}$ $(0 < \alpha < 1)$. Действительно, с одной стороны,

$$f(t) = e^{\ln \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{it}}} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}(e^{int}-1)},$$

т. е. $f(t)$ безгранично делима; с другой стороны, в силу известного тождества Эйлера

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{it}} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^{2^k} e^{i2^k t}}{1+\alpha^{2^k}},$$

и справа стоит произведение простых характеристических функций.

Недавно P. Lévy показал, что существуют безгранично делимые законы распределения, раскладывающиеся в произведение конечного числа простых компонент (даже двух).

(и значит также сопряженных с ними) при специальных ограничениях, накладываемых на числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. Почему понадобились эти ограничения? После того как было доказано, что характеристическая функция всякой компоненты закона (1) имеет вид

$$\exp\Big(i\gamma t + \sum_{\Lambda_n \leqslant \sigma_k} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\Big), \tag{2}$$

где коэффициенты α_{Λ_n} вещественны (теорема 1 § 6), задача заключалась в следующем: *исходя из того, что функция* (2) *характеристическая, т. е. что все коэффициенты ее ряда Фурье неотрицательны, доказать неотрицательность всех* α_{Λ_n}. Действительно, тогда всякая компонента закона (1) была бы законом того же вида; значит, закон (1) не имел бы неразложимых компонент, т. е. принадлежал бы к классу C; с другой стороны, если бы в (2) хотя бы одно α_{Λ_n} было отрицательным, то (2) не была бы безгранично делимой характеристической функцией (см. сноску * на стр. 110) и, значит, не могла бы принадлежать к классу C, а тогда и закон (1) не принадлежал бы к этому классу. Упомянутые ограничения (в теоремах 2 и 3 § 6) позволили доказать неотрицательность чисел α_{Λ_n}, поскольку этими ограничениями исключалась компенсация влияния a priori возможных отрицательных α_{Λ_n} влиянием других, положительных. Однако в общем случае влияния различных α_{Λ_n} на значения коэффициентов ряда Фурье функции (2) могут переплетаться. Возникает вопрос: *не будут ли и в общем случае все* α_{Λ_n} *необходимо неотрицательными?* Иными словами: *не будут ли законы распределения* (1) *принадлежать к классу* C *для всех систем положительных чисел* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *без исключения?*

Естественно рассмотреть прежде всего случай, когда все σ_j ($j = 1, \ldots, k$) целые. Делая в (2) замену $e^{it} = z$ и полагая $\gamma = 0$, мы приходим тогда к следующему вопросу: *пусть* $p(z)$ *полином с вещественными коэффициентами; необходимо ли для неотрицательности коэффициентов ряда*

$$e^{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3}$$

чтобы все коэффициенты полинома $p(z)$ *(за исключением свободного члена, не играющего здесь роли) были неотрицательными?*

Этот вопрос, а вместе с ним и вопросы, поставленные выше, решаются в о т р и ц а т е л ь н о м смысле: существуют полиномы $p(z)$ с коэффициентами р а з н ы х знаков, такие, что в соответствующих им рядах (3) все коэффициенты положительны. Такими являются, например, полиномы $p(z) = 1 + z - \alpha z^2 + z^3 + z^4$ для всех достаточно малых положительных α (именно, удовлетворяющих неравен-

ству $\alpha < \frac{1}{4}$). Действительно, прежде всего нетрудно проверить непосредственным вычислением, что для значений α, удовлетворяющих указанному неравенству, полиномы $p^2(z)$ и $p^3(z)$ имеют положительные коэффициенты. Отсюда следует, что тем же свойством обладают и все дальнейшие степени полинома $p(z)$, ибо $p^{2k}(z) = (p^2(z))^k$, а $p^{2k+1}(z) = p^3(z)(p^2(z))^{k-1}$. Но

$$e^{p(z)} = 1 + p(z) + \frac{p^2(z)}{2!} + \frac{p^3(z)}{3!} + \ldots$$

Таким образом отрицательный член в ряде Тейлора для $e^{p(z)}$ мог бы возникнуть только от члена $-\alpha z^2$ полинома $p(z)$; но при $\alpha < \frac{1}{4}$ он компенсируется членом $\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) z^2$ полинома $\frac{p^2(z)}{2!}$.

Этот пример приводит нас к следующим выводам:

1. *Класс C не замкнут относительно операции компонирования.*

Действительно, если бы компонирование законов класса C не выводило за пределы этого класса, то в нем содержались бы все без исключения законы вида (1), что опровергается приведенным примером. Последний дает возможность и конкретно указать два закона из класса C, которые при компонировании дают закон, не принадлежащий к этому классу. Такими законами будут, например,

$$F_1(x) = F(x; 1), \quad F_2(x) = F\left(\frac{x}{3};\ 1\right) * F\left(\frac{x}{4};\ 1\right).$$

Действительно, оба они содержатся в классе C (первый — в силу теоремы § 3, второй — в силу теоремы 3 § 6). С другой стороны, закон $F(x) = F_1(x) * F_2(x)$ имеет характеристической функцией

$$e^{e^{it} + e^{3it} + e^{4it} - 3} = e^{1 + e^{it} - \alpha e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} - 4 + \alpha} \cdot e^{\alpha e^{2it} - \alpha} \quad \left(\alpha < \frac{1}{4}\right),$$

и так как первый множитель в правой части не безгранично делим, то $F(x)$ не принадлежит к классу C.

2. *Целые характеристические функции, не имеющие нулей, не обязательно безгранично делимы* *; более того, среди них имеются и простые.*

Действительно, если бы все целые характеристические функции без нулей были безгранично делимы, то в (2) ни одно из α_{Δ_n} не могло бы быть отрицательным, в противоречие с приведенным выше примером. Существование простых целых характеристических

* Интересно отметить, что предложение, обратное к отрицаемому, верно: с помощью теорем § 1 можно доказать, что *целая безгранично делимая характеристическая функция не имеет нулей.* По этому поводу см. мою заметку «Одна теорема об аналитических характеристических функциях», Известия Научно-исслед. института математики и механики при Томском гос. университете им. В. В. Куйбышева, т. 2, 1938, вып. 1.

функций без нулей вытекает из существования не безгранично делимых таких функций, ибо не безгранично делимая характеристическая функция имеет по крайней мере один простой делитель, и если она целая и без нулей, то он также обладает этими свойствами.

Таким образом предположение, что класс C содержит все целые характеристические функции, не имеющие нулей, оказывается неверным.

Дальнейшее исследование вопроса об объеме класса C должно, как мне кажется, преследовать прежде всего следующие три цели:

1. Дать полный список законов вида

$$G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) * \prod_{k=1}^{n} F\left(\frac{x-\alpha_k}{\sigma_k};\ \lambda_k\right) * \prod_{l=1}^{m} \bar{F}\left(\frac{x-\beta_l}{\tau_l};\ \mu_l\right), \qquad (4)$$

принадлежащих к классу C.

2. Выяснить, существуют ли в классе C законы с целыми характеристическими функциями, не содержащиеся среди законов (4).

3. Выяснить, существуют ли в классе C законы с нецелыми или даже вообще неаналитическими характеристическими функциями (например, выяснить, принадлежит ли к классу C закон Коши).

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР. Поступило 4. V. 1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cramér H., Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschrift, Bd. 41, 1936, S. 405—414.

[2] Lévy P., Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, Ann. R. Sc. Norm. di Pisa, Ser. II, vol. III, 1934, pp. 337—366.

[3] Lévy P., L'arithmétique der lois des probabilités, C. R. Acad. Sc. Paris, 1937, t. 204, № 2.

[4] Райков Д. А., О разложении законов Пуассона, Доклады А. Н. СССР, т. XIV, 1937, № 1, стр. 9—12.

[5] Хинчин А. Я., Об арифметике законов распределения, Бюллетени МГУ, секция А, 1937, № 1.

[6] Хинчин А. Я., Новый вывод одной формулы П. Леви, Бюллетени МГУ, секция А, 1937, № 1.

D. RAIKOV. ON THE DECOMPOSITION OF GAUSS AND POISSON LAWS

SUMMARY

This paper is devoted to some questions belonging to the arithmetic of distribution laws.

In the §1 I consider the analytic characteristic functions and prove the following two theorems *:

THEOREM I. *If the characteristic function* $f(t)$ *related to the distribution law* $F(x)$ *is regular in the circle* $|t| < R$ *it is regular*

* These theorems were obtained (by another way) also by P. Lévy [see ([3])].

as well in the whole strip $-R < \mathfrak{J}t < R$ *and is represented in this strip by the integral* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$.

THEOREM II. *If the characteristic function* $f(t)$ *is regular in the strip* $-R < \mathfrak{J}t < R$ *every their divisor* $f_1(t)$ *is regular too in this strip and the relation* $f(t) = f_1(t) f_2(t)$ ($f_1(t)$ *and* $f_2(t)$, *the characteristic functions) which takes place for real* t *is true in the whole strip.*

The proof of these theorems is based on the following two lemmas:

LEMMA 1 *. *If* $f(t)$ *is the characteristic function related to the distribution law* $F(x)$ *and* $f^{(2k)}(0)$ *exists, the moment of order* $2k$

$$E_{2k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\, dF(x)$$

exists as well.

LEMMA 2. *If the distribution law* $F_1(x)$ *is the component of distribution law* $F(x)$ *and, for some* $v \gtrless 0$, *the integral* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, dF(x)$ *exists the integral* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, dF_1(x)$ *for this* v *also exists. Moreover there are two numbers* $a \geqslant 0$ *and* $C > 0$ *not depending on* v *for which the inequality*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, dF_1(x) \leqslant C e^{a|v|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{vx}\, dF(x)$$

takes place.

In the § 2 I give the proof of the Cramér's theorem on the decomposition of Gauss laws [see ([1])] which is based upon the Lemma 2 of § 1 and — in this part — is simpler than the original proof of Cramér himself.

In the § 3 is given the Khintchine's proof of my theorem on the decomposition of Poisson laws [see ([4])]. The simplification in comparison with my original proof consists in the replacement of characteristic functions by functions-generatrix of Laplace. This gives the possibility to refer to the ready result from the classical theory of increase of entire functions whereas in my original proof this result has been in fact reproved in terms of entire periodic functions.

The §§ 4 and 5 are devoted to the proof of two characteristic properties of Gauss and Poisson laws. In th § 4 the following theorem is proved: *If every component of the decomposable distribu-*

* See P. Lévy, Calcul des probabilités, p. 174—175, Paris 1925.

tion law $F(x)$ is contained in the type of this law, i. e. if it can be represented in the form $F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$ where $\alpha \gtreqless 0, \sigma \geqslant 0$, then $F(x)$ is the Gauss law. In the § 5 the following theorem is proved: *If the characteristic function $f(t)$ has an infinity of non-equivalent divisors * and among any two of them some one is divided by the other, $f(t)$ is the characteristic function either of Gauss or of Poisson or of conjugate ** to Poisson law.*

In the § 6 I prove the following three theorems which give the considerable generalization and extention of the result of the § 3.

THEOREM 1. *Let $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ be arbitrary positive numbers, $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k$, and $\Lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ the minimal positive modul which contains these numbers, that is the set of numbers $l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2 + \ldots + l_k\sigma_k$ where $l_1, l_2, \ldots, l_k$ independently (with the only restriction $l_1 + l_2 + \ldots + l_k > 0$) run over all non-negative integers. As $\Lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ has no finite limit-points so we may arrange it in the increasing sequence $\Lambda_1 = \sigma_1 < \Lambda_2 < \ldots < \Lambda_n < \ldots$ Then every component of the distribution law*

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right)$$

$$(\gamma_j \gtreqless 0, \ \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, k)$$

where $F\left(\frac{x-\gamma}{\sigma}; \lambda\right)$ are the Poisson laws $\left(F(x;\lambda) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k\leqslant x}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$ and the symbol $*$ denotes the operation of composition (or convolution, or «Faltung») of distribution laws, has the characteristic function of the form

$$\exp\left(i\gamma t + \sum_{\Lambda_n \leqslant \sigma_k} \alpha_{\Lambda_n}(e^{i\Lambda_n t} - 1)\right)$$

the coefficients γ and α_{Λ_n} being real.

THEOREM 2. *If $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ $(0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k)$ are linearly rationally independent that is no relation*

$$r_1\sigma_1 + r_2\sigma_2 + \ldots + r_k\sigma_k = 0 \quad (|r_1| + |r_2| + \ldots + |r_k| > 0)$$

with rational $r_1, r_2, \ldots, r_k$ taking place then the distribution laws

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right)$$

---

* I call two characteristic functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ equivalent when between them the relation of the form

$$f_1(t) = e^{i\alpha t} f_2(t) \qquad (\alpha \text{ real})$$

takes place.

** I call the conjugate law to the law $F(x)$, the law $\overline{F}(x) = 1 - F(-x)$.

have components only of the same form

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\delta_1}{\sigma_1}; \mu_1\right) * F\left(\frac{x-\delta_2}{\sigma_2}; \mu_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\delta_k}{\sigma_k}; \mu_k\right)$$

where $\delta_j \gtreqless 0$, $\mu_j \leqslant \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

THEOREM 3. *The distribution laws*

$$F(x) = F\left(\frac{x-\gamma_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\gamma_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\gamma_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right)$$

where $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ *are arbitrary positive numbers which satisfy the condition*

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k \leqslant 2\sigma_1,$$

have components only of the same form

$$F_1(x) = F\left(\frac{x-\delta_1}{\sigma_1}; \mu_1\right) * F\left(\frac{x-\delta_2}{\sigma_2}; \mu_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\delta_k}{\sigma_k}; \mu_k\right),$$

where $\delta_j \gtreqless 0$, $\mu_j \leqslant \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

The proof of these theorems is based on the following lemma which gives the generalization of one known inequality joining the real part of any entire function with the coefficients of their Taylor series upon Fourier series of entire almost periodic functions.

LEMMA. *Let* $h(t) \sim \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda) e^{i\lambda t}$ *be an entire almost periodic function and* $A(v) = \max_{-\infty<u<\infty} \Re h(u + iv)$. *Then for every* v *the inequality*

$$|\alpha(\lambda)e^{-\lambda v} + \bar{\alpha}(-\lambda)e^{\lambda v}| \leqslant \max\{4A(v), 0\} - 2\Re\alpha(0)$$

takes place.

The § 7 is devoted to the discussion of the class of distribution laws which have no indecomposable components (I call it the class C). I prove that this class contains not all the distribution laws of the form

$$F\left(\frac{x-\alpha_1}{\sigma_1}; \lambda_1\right) * F\left(\frac{x-\alpha_2}{\sigma_2}; \lambda_2\right) * \ldots * F\left(\frac{x-\alpha_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right).$$

From this it follows that

1. The class C is not closed in respect of the operation of composition of distribution laws.

2. There are non-unboundedly divisible (and in particular indecomposable) distribution laws having entire characteristic functions without zeros.

Finally, I put forward the following three problems:

1. To give a complete list of distribution laws of the form

$$G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) * \prod_{k=1}^{n} F\left(\frac{x-\alpha_k}{\sigma_k}; \lambda_k\right) * \prod_{l=1}^{m} \bar{F}\left(\frac{x-\beta_l}{\tau_l}; \mu_l\right) \qquad (1)$$

contained in the class C ($G(x)$ denotes the normal distribution law).

2. To resolve, whether there are in the class C distribution laws with entire characteristic functions not contained among the distribution laws of the form (1)?

3. To resolve, whether there are in the class C distribution laws with non-entire or generally non-analytic characteristic functions (for instance, the Cauchy law)? *

---

* The results established in the present paper were obtained by author in the winter of 1936. Since that time Paul Lévy had published several notes and articles containing some theorems which give a further developement to some of these results.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. В. КЕЛДЫШ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕТ ИЗМЕРИМЫХ B

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Доказано, что всякое решето, составленное из измеримых B гребенок, можно преобразовать так, что все цепи его не пусты. Это свойство применено к исследованию вопроса о строении элемента класса $\alpha+1$ относительно содержащего его элемента класса α.

Эта работа посвящена изучению элементов класса α и вопросу о взаимоотношении между элементами классов α и $\alpha+1$. Для этого следует предварительно рассмотреть одно свойство решет, элементами которого являются B-множества (элементы) каких-то определенных классов.

Пусть $\triangle$ — прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, а $\mathscr{E}$ — элемент класса α, расположенный на верхней стороне прямоугольника $\triangle$. Множество всех точек прямоугольника $\triangle$, ортогональные проекции которых на соответствующую сторону входят в $\mathscr{E}$, называются α-гребенкой. Это, очевидно, плоский элемент класса α. Система гребенок таких, что: 1) две гребенки либо не пересекаются либо одна лежит целиком внутри другой и 2) каждая гребенка входит не более чем в конечное число гребенок, — называется гребенчатым решетом. Гребенка, не входящая ни в какую другую гребенку решета, называется гребенкой ранга 1; гребенка, входящая в $k-1$ гребенок, — гребенкой ранга k, подчиненной всем гребенкам, ее содержащим.

Пусть гребенки решета — элементы классов α'. Если α наименьшее число, большее всех чисел α', то решето называется α-гребенчатым. Множество $\mathscr{E}$, лежащее на оси OX, определяется α-гребенчатым решетом, если оно является проекцией плоского множества $0^{(\alpha)}$:

$$0^{(\alpha)} = S_1^{(\alpha)} \cdot S_2^{(\alpha)} \cdot \ldots \cdot S_k^{(\alpha)} \ldots,$$

где $S_k^{(\alpha)}$ — сумма всех гребенок решета ранга k. Последовательность гребенок решета таких, что каждая последующая содержится в предыдущей

$$\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \triangle_{n_k}^{(k)} \supset \ldots,$$

называется цепью. Можно всегда предполагать, что диаметры гребенок с возрастанием ранга стремятся к нулю и, следовательно, существует не более одной точки, общей всем гребенкам цепи. Если такая точка ξ существует, то мы будем говорить, что цепь к ней сходится. В противном случае мы будем называть цепь пустой. Кроме того, мы будем предполагать, что решето упорядочено, т. е. что проекции на ось OY гребенок 1-го ранга, а также гребенок ранга k, подчиненных одной и той же гребенке ранга $k-1$, образуют простую возрастающую последовательность отрезков. Известно, что всякое решето можно привести к такому виду.

Мы докажем лемму, которая ляжет в основу всех наших дальнейших исследований.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть дано α-гребенчатое решето, определяющее множество E. Разбивая каждую его гребенку на счетное число гребенок и отбрасывая, быть может, некоторые из вновь полученных, мы можем получить новое α-гребенчатое решето, определяющее то же множество и не имеющее пустых цепей.*

Для обычного прямоугольного решета, для решета, гребенки которого — замкнутые множества, сформулированное предложение, очевидно, имеет место. Мы предположим, что оно имеет место для всех чисел $\alpha' < \alpha$, и покажем, что тогда оно остается верным и для α.

Пусть E есть A-множество, лежащее в J_x, а C_α — плоское α-гребенчатое решето, его определяющее. Всякая гребенка решета C_α есть элемент класса $\alpha' < \alpha$. Предположим, что все гребенки ранга k перенумерованы, и пусть $\triangle_n^{(k)}$ n-ая гребенка ранга k; $\triangle_n^{(k)} = \text{él}\,\alpha'$, $\alpha' < \alpha$. Следовательно,

$$\triangle_n^{(k)} = \prod_{i=1}^{\infty} \overline{\triangle}_{ci}^{(k,n)};$$

$$\triangle_{ci}^{(k,n)} = \sum_{m_1 m_2 \ldots m_i} \overline{\triangle}_{m_1 m_2 \ldots m_i}^{(k,n)},$$

причем $\overline{\triangle}_{m_1 m_2 \ldots m_i}^{(k,n)}$ гребенка, которая проектируется на ось OY в тот же отрезок, как и гребенка $\triangle_n^{(k)}$. Кроме того,

$$\overline{\triangle}_{m_1 m_2 \ldots m_i}^{(k,n)} = \text{él}\,\alpha'', \alpha'' < \alpha'.$$

Система всех гребенок $\overline{\triangle}_{m_1 m_2 \ldots m_i}^{(k,n)}$ при постоянных k и n является α'-гребенчатым решетом, определяющим множество, в которое проектируется на ось OX гребенка $\triangle_n^{(k)}$. И так как $\alpha' < \alpha$, мы можем предположить, что решето это приведено к такому виду, что все цепи его не пусты и что каждая цепь определяет одну точку соответственного множества (очевидно, что каждая цепь сходится не к точке, а к отрезку, параллельному оси OY).

Рассмотрим теперь k вложенных последовательно друг в друга гребенок $\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \triangle_{n_k}^{(k)}$. Мы заменим решето C_α новым

решетом C_β, $\beta \leqslant \alpha$, заменяя каждую α-гребенку $\triangle_{n_k}^{(k)}$ гребенчатым множеством $\overline{\triangle}_{ck}^{(1n_1)} \cdot \overline{\triangle}_{ck}^{(2n_2)} \ldots \overline{\triangle}_{ck}^{(kn_k)}$. Это множество содержит, очевидно, $\triangle_{nk}^{(k)}$ и является суммой счетного числа непересекающихся гребенок $\delta_{n'}^{(k')} = \overline{\triangle}_{m'_1 m'_2 \ldots m'_k}^{(1n_1)} \cdot \overline{\triangle}_{m''_1 m''_2 \ldots m''_k}^{(2n_2)} \cdot \ldots \cdot \overline{\triangle}_{m_1^{(k)} m_2^{(k)} \ldots m_k^{(k)}}^{(kn_k)}$; гребенка $\delta_{n'}^{(k')}$ является элементом класса α'' меньшего $\alpha' < \alpha$, $\delta_{n'}^{(k')} \leqslant \text{él}\ \alpha''$, $\alpha'' < \alpha' < \alpha$, так как $\overline{\triangle}_{m_1^{(i)} m_2^{(i)} \ldots m_k^{(i)}}^{(in_i)} \leqslant \text{él}\,\alpha''$.

Докажем, что множество всех гребенок $\delta_{n'}^{(k')}$, построенных для всех $\triangle_n^{(k)}$, образует решето. Для этого достаточно показать, что две гребенки либо не пересекаются, либо одна лежит целиком внутри другой. Гребенки одного ранга k не пересекаются по построению, так как решето C_α упорядочено. Остается рассмотреть гребенки различных рангов.

Пусть $\delta_{l_k}^{(k)}$ и $\delta_{l_r}^{(r)}$ такие гребенки, причем $k < r$. Первая из них является, как указано выше, пересечением k, а вторая r множеств. Если каждый из первых k множителей гребенки $\delta_{l_r}^{(r)}$ содержится в соответственном множителе гребенки $\delta_{l_k}^{(k)}$, то $\delta_{l_r}^{(r)} \subset \delta_{l_k}^{(k)}$. Если же существует такое число $i \leqslant k$, что множитель номера i для гребенки $\delta_{l_r}^{(r)}$ не подчинен множителю номера i для гребенки $\delta_{l_k}^{(k)}$, то эти множители, а следовательно, и гребенки $\delta_{l_k}^{(k)}$ и $\delta_{l_r}^{(r)}$ не имеют ни одной общей точки.

Решето C_β, образованное множеством всех гребенок $\delta_n^{(k)}$, определяет то же множество E, что и решето C_α. Действительно, множество E, очевидно, входит в множество $\mathcal{E}$, определенное с помощью C_β, так как каждая гребенка ранга k решета C_α покрыта суммой счетного числа гребенок ранга k решета C_β. Покажем, что и обратно $\mathcal{E} \subset E$. Пусть x_0 точка множества $\mathcal{E}$, а ξ_0 — точка соответственного плоского множества, которая проектируется в x_0. Тогда существует цепь гребенок решета C_β, сходящаяся к ξ_0:

$$\delta_{l_1}^{(1)} \supset \delta_{l_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \delta_{l_k}^{(k)} \supset \ldots \supset \xi_0.$$

Множитель номера i всякого элемента нашей цепи $\delta_{l_k}^{(k)}$, $k \geqslant i$, является частью множества $\overline{\triangle}_{ck}^{(in_i)}$. Точка ξ_0, общая всем элементам цепи $\delta_{l_k}^{(k)}$, принадлежит поэтому всем множествам $\triangle_{ck}^{(in_i)}$, а следовательно, и их пересечению $\triangle_{n_i}^{(i)}$, т. е. гребенке решета C_α. И, значит, точка ξ_0 принадлежит цепи решета C_α:

$$\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \triangle_{n_i}^{(i)} \supset \ldots \supset \xi_0;$$

следовательно, ξ_0 принадлежит множеству, проекция которого в J_x входит в E, и $\mathcal{E} \subset E$, откуда $\mathcal{E} \equiv E$.

Покажем, что все цепи решета C_β не пусты. Рассмотрим произвольную цепь

$$\delta_{l_1}^{(1)} \supset \delta_{l_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \delta_{l_k}^{(k)} \supset \ldots$$

и возьмем наименьший прямоугольник, содержащий гребенку $\delta_{l_k}^{(k)}$; диаметры прямоугольников стремятся к нулю (как и диаметры гребенок решет C_α и C_β) с возрастанием k, и потому существует единственная точка ξ, общая всем прямоугольникам, соответствующим гребенкам нашей цепи. Мы покажем, что точка ξ принадлежит всем гребенкам рассматриваемой цепи. Рассматривая множители номера i для всех гребенок нашей цепи $\delta_{l_k}^{(k)}$, $k \geqslant i$, заметим, что последовательность этих множителей образует цепь

$$\bar{\triangle}_{m_1 \ldots m_i}^{(in_i)} \supset \bar{\triangle}_{m_1 \ldots m_i m_{i+1}}^{(in_i)} \supset \cdots \supset \triangle_{m_1 \ldots m_i \ldots m_s}^{(in_i)} \supset \cdots$$

решета, определяющего проекцию в J_x множества $\triangle_{n_i}^{(i)}$. По предположению всякая цепь этого решета не пуста и определяет только одну точку соответствующего множества. Этой точкой может быть, очевидно, только проекция точки ξ в силу того, что диаметры гребенок стремятся к нулю, следовательно, точка ξ принадлежит всем элементам этой последней цепи. И так как это имеет место, каково бы ни было i, то точка ξ принадлежит всем элементам $\delta_{l_k}^{(k)}$ рассматриваемой нами цепи решета C_β, и, следовательно, эта цепь не пуста и сходится к точке ξ.

Перейдем теперь к преобразованию решета C_α. Каждая гребенка $\triangle_n^{(k)}$ этого решета покрыта суммой счетного числа гребенок ранга k решета C_β:

$$\triangle_n^{(k)} \subset \sum_l \delta_l^{(k)}.$$

Разобьем гребенку $\triangle_n^{(k)}$ на счетное число слагаемых, рассматривая, каково бы ни было l, пересечение $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$ как отдельную гребенку:

$$\triangle_n^{(k)} = \sum_l \triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}.$$

Гребенка $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$ является плоским элементом класса меньшего α и проекция его на ось OY (если оно не пусто) совпадает с проекцией $\triangle_n^{(k)}$. Если среди новых гребенок $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$ окажутся такие, которые не содержат точек плоского множества $\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n^{(k)}$, то мы их отбросим. Совокупность всех оставшихся после этого гребенок $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$, как легко видеть, образует α-гребенчатое решето C'_α, определяющее то же множество E, как и решето C_α.

Покажем, что *все цепи решета C'_α не пусты.* Действительно, каждой цепи решета C'_α

$$(\triangle_{n_1}^{(1)} \cdot \delta_{l_1}^{(1)}) \supset (\triangle_{n_2}^{(2)} \cdot \delta_{l_2}^{(2)}) \supset \ldots \supset (\triangle_{n_k}^{(k)} \cdot \delta_{l_k}^{(k)}) \supset \ldots$$

соответствует цепь решета C_β

$$\delta_{l_1}^{(1)} \supset \delta_{l_2}^{(2)} \supset \ldots \supset \delta_{l_k}^{(k)} \supset \ldots \supset \xi,$$

которая, как мы видели, не пуста. Рассматривая, как мы уже делали выше, множители номера i для каждой гребенки $\delta_{l_k}^{(k)}$, $k \geqslant i$, последней цепи, мы увидим, что эти гребенки образуют цепь

$$\overline{\triangle}_{m_1\ldots m_i}^{(in_i)} \supset \overline{\triangle}_{m_1\ldots m_i m_{i+1}}^{(in_i)} \supset \ldots \supset \overline{\triangle}_{m_1\ldots m_i\ldots m_s}^{(in_i)} \supset \ldots,$$

которая не пуста и сходится к вертикальному отрезку множества $\triangle_{n_i}^{(i)}$. С другой стороны, все элементы последней цепи являются множителями гребенок $\delta_{l_k}^{(k)}$; поэтому все они содержат точку ξ. Следовательно, и соответствующий отрезок гребенки $\triangle_{n_i}^{(i)}$ содержит точку ξ. Так как это имеет место, каково бы ни было число i, точка ξ входит во всякий элемент рассматриваемой нами цепи решета C'_α. Следовательно, эта цепь не пуста и сходится к точке ξ.

Ч. Т. Д.

Применим доказанное свойство измеримых B-решет к изучению строения элементов класса α. Пусть E такой элемент. Тогда $E = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n_1 n_2\ldots n_k} E_{n_1 n_2\ldots n_k}$, причем $E_{n_1 n_2\ldots n_k}$ элемент класса меньшего, чем α. Систему всех множеств $E_{n_1 n_2\ldots n_k}$ мы будем называть **образующей системой** множества E.

На основании леммы можно всегда предполагать, что все цепи этой образующей системы не пусты. Кроме того, легко показать, что, выбросив из E не более счетного числа точек, можно привести его образующую систему к такому виду (сохраняя при этом непустоту цепей), что каждое образующее множество $E_{n_1 n_2\ldots n_k}$ ранга k содержит в точности счетное (неконечное) число образующих множеств ранга $k+1$. Вспомним теперь, что пространство Бэра J_x (множество всех иррациональных точек оси OX) может быть представлено как пересечение сумм интервалов Бэра:

$$J_x = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2\ldots n_k} \triangle_{n_1 n_2\ldots n_k}.$$

Интервалом Бэра ранга k называется интервал

$$\left(n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{n_k}}}}, \quad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{\vdots}{+ \cfrac{1}{n_k + 1}}}} \right)$$

Все цепи этой образующей системы интервалов не пусты. Таким образом мы видим, что образующая система элемента E совершенно аналогична образующей системе пространства Бэра, только интервалы Бэра здесь заменены множествами $E_{n_1 n_2\ldots n_k}$. Следовательно, *всякий элемент любого класса α можно рассматривать как пространство Бэра*. Все свойства пространства Бэра, вытекающие из его конструкции, и все связанные с ним понятия могут быть распространены на элемент класса α.

Так, можно ввести понятие интервала или порции (часть E, высеченная образующим множеством $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$), понятие категории, области, замкнутого множества, — вообще, исходя из элемента E и его порций, можно построить на нем всю классификацию Бэра таким же образом, как это делается на бэровском пространстве. Существенное отличие того, что происходит на элементе E, от того, что мы имеем для пространства Бэра, заключается в том, что *категория и класс относительно E лежащего в нем измеримого B-множества $\mathcal{E}$ зависит от образующей системы множества E.* При изменении этой образующей системы может изменяться категория и класс множества $\mathcal{E}$ относительно E. Однако изменения класса происходят в определенных пределах. Мы остановимся на рассмотрении пределов изменения класса множества $\mathcal{E}$ относительно E и дадим необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество $\mathcal{E}$ было элементом класса $\alpha+1$ (в обычном смысле).

Пусть E элемент класса α, заданный образующей системой $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Часть множества E, высеченную каким-нибудь образующим множеством $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, мы назовем **α-порцией** $\pi(E)$. Сумма счетного числа α-порций называется α-областью. Множество, которое, как и его дополнение относительно E, является суммой счетного числа α-порций, называется множеством класса 0 относительно E. Дополнение относительно E области называется α-замкнутым множеством $F(E)$. Далее мы можем получить множества $G_\delta(E)$, $F_\sigma(E)$, $F_{\sigma\delta}(E)$ и т. д. Пусть $\mathcal{E} \subset E$ и $\mathcal{E} \leqslant G_\delta(E)$. Легко видеть, что если α число первого рода, то $\mathcal{E} \leqslant \text{él}\,\alpha$, а если α число второго рода, то $\mathcal{E} \leqslant \text{él}\,(\alpha+1)$.

Докажем теперь следующее предложение:

Пусть $E = \text{él}\,\alpha$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ счетное число множеств таких, что $e_n \subset E$ и e_n отделимо от $E - e_n$ при помощи элемента класса $< \alpha - 1$, если α число первого рода, и при помощи элемента класса $< \alpha$, если α число второго рода. Тогда существует такая образующая система множества E, при которой для всех n $\text{cl}\, e_n(E) = 0$.

Мы рассмотрим только тот случай, когда α число первого рода, так как доказательство для второго случая совершенно такое же, как для первого. Пусть элемент E задан образующей системой $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ и $E_{\beta k}$ сумма всех образующих ранга k. Каждое $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ является элементом класса $< \alpha - 1$. Для каждого множества e_n существует элемент H_n класса β, $\beta < \alpha - 1$, такой, что $e_n \subset H_n$ и $H_n \cdot (E - e_n) = 0$. Мы разобьем каждый образующий элемент 1-го ранга E_{n_1} на счетное число элементов, выделяя в отдельный элемент часть его, заключенную внутри H_1:

$$E_{n_1} = E_{n_1} \cdot H_1 + (E_{n_1} - H_1).$$

$E_{n_1} - H_1$ каким-то образом разбито на сумму элементов класса $< \alpha - 1$. Перенумеровав все множества, на которые разбита таким образом совокупность всех множеств E_{n_1}, мы получим новую

систему образующих 1-го ранга: $E_{1\sigma} = \sum E'_{n_1}$. Всякое множество $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ранга k также естественно разбивается на счетное число слагаемых, так как часть его, лежащую внутри какого-нибудь множества E'_{n_1}, мы рассматриваем как отдельное множество, и таким образом мы получаем новую образующую систему множества E: $\{E'_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Оставляя без изменения образующие 1-го ранга этой системы, мы разбиваем на счетное число слагаемых каждое образующее ранга 2 (и выше), выделяя в отдельный элемент часть его, заключенную внутри H_2:

$$E'_{n_1 n_2} = E'_{n_1 n_2} \cdot H_2 + (E'_{n_1 n_2} - H_2),$$

и получаем новую образующую систему множества E: $\{E'_{n_1}, E^2_{\substack{n_1 n_2 \ldots n_k \\ k \geqslant 2}}\}$.

Поступая последовательно таким же образом для каждого k и отбирая затем совокупность образующих ранга k, полученную при k-ом шаге, мы получим образующую систему для множества E: $\{E^k_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Однако эта система может иметь пустые цепи; но согласно доказанной выше лемме, разбив еще раз каждый из элементов этой системы на счетное число слагаемых, мы получим новую образующую систему $\{E^*_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ для множества E, цепи которой не пусты.

Покажем, что если E задано этой образующей системой, то, каково бы ни было k, $\mathrm{cl}\, e_k(E) = 0$.

Действительно, множество H_k отсекает от E некоторое число целых образующих ранга k. Сумма всех образующих $E^k_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ранга k, лежащих внутри H_k, отсекает, очевидно, от E множество e_k, и, следовательно, множество e_k является суммой счетного числа порций множества E одного ранга k и, как легко видеть, отсюда следует, что $\mathrm{cl}\, e_k(E) = 0$.

Ч. Т. Д.

Условие неповышения класса: *Для того чтобы множество $\mathscr{E}$, лежащее внутри элемента E класса α, было множеством класса не выше α, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая образующая система множества E, при которой $\mathrm{cl}\, \mathscr{E}(E) \leqslant 2$, если α число первого рода, и при которой $\mathrm{cl}\, \mathscr{E}(E) \leqslant 1$, если α число второго рода.*

Мы проведем доказательство только для случая, когда α число первого рода, так как оно автоматически переносится и на случай, когда α число второго рода.

Доказательство необходимости. Пусть $\mathscr{E}$ множество, лежащее внутри элемента E, и $\mathrm{cl}\, \mathscr{E} \leqslant \alpha$. Тогда в силу известной теоремы о строении классов как $\mathscr{E}$, так и его дополнение $C\mathscr{E}$ является * суммой счетного числа элементов класса $\leqslant \alpha$. Следо-

* Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris 1930, p. 76.

вательно, и дополнение $E-\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}$ относительно E является суммой счетного числа элементов класса $\leqslant \alpha$:

$$\mathcal{E}=\sum e_n; \qquad E-\mathcal{E}=\sum e'_n;$$
$$\mathrm{cl}\, e_n \leqslant \alpha; \qquad \mathrm{cl}\, e'_n \leqslant \alpha;$$
$$e_n=\prod \sum e_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \qquad e'_n=\prod \sum e'_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

причем $e_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ и $e'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ элементы класса $<\alpha-1$. А тогда в силу доказанного выше существует такая образующая система множества E, при которой все части, высеченные из него множествами $e_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ и $e'_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, являются множествами нулевого класса относительно E и следовательно, множества e_n и e'_n — множествами типа $G_\delta(E)$. Итак, в этой образующей системе как множество $\mathcal{E}$, так и его дополнение относительно E является суммой счетного числа множеств $G_\delta(E)$, следовательно, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}(E)\leqslant 2$.

Ч. Т. Д.

Доказательство достаточности. Пусть $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}(E)\leqslant 2$. Тогда как $\mathcal{E}$, так и его дополнение относительно E являются суммами множеств $G_\delta(E)$, а множество $G_\delta(E)$ не выше, чем элемент класса α. Следовательно, как множество $\mathcal{E}$, так и его дополнение $C\mathcal{E}$ являются суммой элементов класса не выше α, и $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}\leqslant\alpha$.

Ч. Т. Д.

Легко видеть, что доказанное условие можно еще сформулировать в следующей форме:

Для того чтобы множество $\mathcal{E}$, лежащее внутри элемента E класса α, было элементом класса $\alpha+1$, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была образующая система элемента E, $\mathcal{E}$ было на нем не менее, чем $F_{\sigma\delta}(E)$ $[G_\delta(E)]$ и чтобы существовала такая образующая система элемента E, при которой

$$\mathcal{E}=F_{\sigma\delta}(E), \quad [\mathcal{E}=G_\delta(E)],$$

если α число первого рода [если α число второго рода].

Таким образом конструкция элемента класса $\alpha+1$ внутри элемента класса α совершенно аналогична конструкции множества $F_{\sigma\delta}$ в обыкновенном пространстве Бэра J_x. Трудность построения элемента класса $\alpha+1$ внутри данного элемента класса α заключается в том, что тогда как при изменении образующей системы пространства Бэра класс лежащего в нем множества не меняется, — при изменении образующей системы множества E класс меняется. Было бы интересно найти условия, достаточные для конструкции множества $F_{\sigma\delta}(E)$ в некоторой образующей системе элемента E, при которой оно является в точности элементом класса $\alpha+1$.

Заметим, что *класс относительно элемента E содержащейся в нем части $E\cdot\mathcal{E}$ какого-нибудь множества $\mathcal{E}$ не выше, чем класс множества $\mathcal{E}$ в абсолютном смысле.*

Очевидно, достаточно показать это для случая, когда $\mathcal{E}$ множество нулевого класса. В этом случае $\mathcal{E}$, как и его дополнение $C\mathcal{E}$, является суммой счетного числа порций. Мы выделим в одну сумму все образующие множества E, целиком лежащие внутри $\mathcal{E}$, и в другую сумму все образующие, целиком лежащие внутри $C \cdot \mathcal{E}$. Легко видеть, что каждая точка множества E входит в какую-то из этих сумм. Действительно, пусть x точка элемента E; x входит либо в $\mathcal{E}$, либо в $C\mathcal{E}$; пусть, например, $x \subset \mathcal{E}$, следовательно, x входит в какую-то порцию множества $\mathcal{E}$ и так как длины образующих элемента E стремятся к нулю, то найдется образующее $E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, лежащее целиком в данной порции множества $\mathcal{E}$ и, следовательно, попавшее в соответствующую сумму. Таким образом часть множества $\mathcal{E}$, лежащая внутри E, так же, как и ее дополнение относительно E, является суммой счетного числа порций множества E, следовательно, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}(E) = 0$ и для любого измеримого B множества E имеем $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}(E) \leqslant \mathrm{cl}\,\mathcal{E}$.

Математический институт им. В. А. Стеклова. Академия Наук СССР.

Поступило 5. VI. 1937.

LUDMILA KELDYCH. SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CRIBLES DÉNOMBRABLES MESURABLES B

RÉSUMÉ

On appelle «peigne» un ensemble formé des segments appartenant à un rectangle et parallèles à une de ses côtés. On appelle crible peigné un système de peignes tel que 1) deux peignes quelconques de ce système sont contenus l'un dans l'autre, ou, au contraire, n'ont pas de points communs, et 2) chaque peigne peut être contenu dans un nombre fini au plus de peignes de notre système. On dit qu'un peigne est un peigne de rang k s'il est contenu dans $k-1$ peignes de notre système. Si les peignes de notre crible sont des éléments mesurables B des classes α' et si α est le moindre nombre fini ou transfini superieur à tous les α', alors on appelle ce crible α-peigné. Soit S_k^{α} la somme de tous les peignes de rang k. Alors un ensemble E est défini au moyen du crible donné, s'il est la projection dans le domaine J_x de l'ensemble

$$\theta^{\alpha} = S_1^{\alpha} \cdot S_2^{\alpha} \cdot \ldots \cdot S_k^{\alpha} \ldots$$

On appelle chaîne une suite de peignes de notre crible,— chaque peigne suivant étant contenu dans le peigne précédent. Nous démontrons la propriété suivante des cribles peignés mesurables B:

Soit C_α un crible α-peigné qui définit l'ensemble E. En décomposant chaque peigne en un nombre dénombrable de peignes et en supprimant peut-être quelques de ces nouveaux peignes nous pouvons

obtenir un nouveau crible α-peigné definissant le même ensemble E et tel que, quel que soit la chaîne de ce crible, il existe un point appartenant à tous les peignes de cette chaîne.

Cette propriété existe dans le cas où les peignes de notre crible sont des rectangles ou des ensembles fermés. Nous démontrons que si elle existe pour tous les $\alpha' < \alpha$, elle reste encore pour le nombre α lui-même. Nous pouvons toujours supposer que notre crible soit ordonné, c'est-à-dire que les projections sur l'axe OY des peignes de rang 1 et même de rang k, subordonnés à un même peigne de rang $k-1$, forment une simple suite ascendente de portions. Etant donné un crible ordonné α-peigné C_α, pour le déformer de manière que chaque chaîne contienne un point nous, remplaçons d'abord chaque α'-peigné de rang k $(\Delta_{n_k}^{(k)})$ par la somme des peignes $\overline{\triangle}_{\sigma_k}^{(1n_1)} \cdot \overline{\triangle}_{\sigma_k}^{(2n_2)} \dots \overline{\triangle}_{\sigma_k}^{(kn_k)}$ si l'on a: $\triangle_{n_i}^{(i)} = \prod_{i=1}^{\infty} \overline{\triangle}_{\sigma r}^{(in_i)}$, $\overline{\triangle}_{\sigma r}^{(in_i)} = \operatorname{Inf} \alpha''$, $\alpha'' < \alpha' < \alpha$, et si $\triangle_{n_1}^{(1)} \supset \triangle_{n_2}^{(2)} \supset \dots \supset \triangle_{n_k}^{(k)}$. Comme notre propriété existe dans le cas $\alpha' < \alpha$ nous supposons ensuite que chaque $\overline{\triangle}_{\sigma r}^{(in_i)}$ $(k, n$ fixes) soit une somme des éléments peignés des classes inférieures à α de manière que chaque chaîne contienne des points. Alors $\overline{\triangle}_{\sigma k}^{(1n_1)} \cdot \overline{\triangle}_{\sigma k}^{(2n_2)} \cdot \dots \cdot \overline{\triangle}_{\sigma k}^{(kn_k)} = \sum \delta_n^{(k)}$, $\delta_n^{(k)}$ est un α''-peigné, $\alpha'' < \alpha'$.

Maintenant nous décomposons chaque peigne $\triangle_n^{(k)}$ en un nombre dénombrable de peignes de la manière suivante: $\triangle_n^{(k)} = \sum_l \triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$; s'il existe des peignes $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$ qui ne contiennent de points de l'ensemble plan θ^α, nous les supprimons de notre crible. Nous démontrons que le crible formé des tous les peignes $\triangle_n^{(k)} \cdot \delta_l^{(k)}$ qui ne sont pas supprimés, possède la propriété énoncée et définit le même ensemble E.

Nous appliquons la propriété énoncée aux éléments mesurables B. Soit E un élément de classe α,

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} E_{n_1 n_2 \dots n_k}, \quad E_{n_1 n_2 \dots n_k} = \text{él}\, \alpha', \ \alpha' < \alpha.$$

Nous appelons le système de tous les ensembles $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ s y s t è m e g é n é r a t e u r d e l'e n s e m b l e E. D'après notre propriété, nous pouvons supposer que chaque chaîne de ce système contienne un point et un seul. Nous observons que (si on exclut peut-être un nombre dénombrable de points) E est obtenu à partir des ensembles $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de la même manière dont l'espace de Baire J_x est obtenu à partir des portions de Baire,—et nous considérons l'élément E (en excluant peut-être un nombre dénombrable de points) comme un espace analogue à l'espace de Baire. Alors, toute théorie descriptive des ensembles dans l'espace J_x peut être t r a n s p o r t é e dans l'élément E.

On appelle α-portion de E l'ensemble $E \cdot E_{n_1 n_2 \dots n_k}$; on considère les ensembles de classe 0 relativement à E, qui sont les sommes des α-portions, ainsi que leurs complémentaires par rapport à E, les α-domaines de E, les ensembles α-fermés sur E etc. On dit que la classe d'un ensemble $\mathcal{E} \subset E$ relativement à E est égale à α, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}.(E) = \alpha$, si $\mathcal{E}$ est construit à partir des ensembles $E \cdot E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de même manière, qu'un ensemble de classe α est construit à partir des portions de l'espace J_x^r. On doit remarquer que *la classe d'un ensemble $\mathcal{E} \subset E$ relativement à E dépend du système générateur de E*; en changeant le système générateur de E on change la classe de $\mathcal{E}$ relativement à E.

Nous pouvons donner maintenant une nouvelle forme de critèrium de non élévation de classe:

Pour qu'un ensemble $\mathcal{E}$ situé dans un éléments E de classe α soit un ensemble de classe α au plus il est nécessaire et suffisant qu'il existe un tel système générateur de E, que l'on a $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}\,(E) \leqslant 2$, *si α' est un nombre de première espèce, et* $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}\,(E) \leqslant 1$, *si α est un nombre de seconde espèce.*

On obtient cette condition comme une conséquence de la proposition suivante qu'on démontre très facilement:

Soit E un él α *et $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ une suite dénombrable des ensembles tels que $e_n \subset E$ et e_n est séparable de $E - e_n$ au moyen d'un élément de classe $< \alpha - 1$* (α), *si α est un nombre de première (seconde) espèce. Alors, il existe un tel système générateur de E que l'on a* $\mathrm{cl}\, e_n (E) = 0$ *quel que soit n.*

Remarquons encore que la classe d'un ensemble mesurable B $\mathcal{E} \subset E$ relativement à E, $\mathrm{cl}\,\mathcal{E}\,(E)$ est au plus égale à la classe de $\mathcal{E}$ dans le sens absolu.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

М. Л. ФРАНК

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ УНИКУРСАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ *

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Работа содержит исследование одной специальной последовательности кривых, заданных в параметрической форме и в пределе переходящих равномерно в контур наперед заданного многоугольника. Названная последовательность—одна из простейших из числа удовлетворяющих поставленному требованию.

§ 1

Пусть задан многоугольник своими вершинами

$$M_0(a_0, b_0), M_1(a_1, b_1), \ldots, M_{m-1}(a_{m-1}, b_{m-1}).$$

Уравнение прямой, соединяющей вершины M_k, M_{k+1}, может быть написано в виде:

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \frac{(a_{k+1} + a_k) + (a_{k+1} - a_k)(t - 2k)}{2}, \\ \eta_k &= \frac{(b_{k+1} + b_k) + (b_{k+1} - b_k)(t - 2k)}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем точка ξ_k, η_k находится на отрезке $M_k M_{k+1}$, когда t пробегает значения $2k - 1 \leqslant t \leqslant 2k + 1$.

Возьмем кривую:

$$\left.\begin{aligned} x - a_0 &= \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(a_{k+1} + a_k - 2a_0) + (a_{k+1} - a_k)(t - 2k)}{2[1 + (t - 2k)^{2n}]}, \\ y - b_0 &= \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(b_{k+1} + b_k - 2b_0) + (b_{k+1} - b_k)(t - 2k)}{2[1 + (t - 2k)^{2n}]}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Кривая эта, как нетрудно видеть, приближается к заданному многоугольнику при возрастании n и при условии, что $a_m = a_0$ и $b_m = b_0$. В самом деле, при $2k - 1 < t < 2k + 1$ выражение, сто-

* Доложено на заседании Группы математики Академии Наук СССР 27. III. 1937.

ящее в знаменателе, $1+(t-2k)^{2n}$, стремится к единице и, следовательно, один из членов суммы

$$x_k=\frac{(a_{k+1}+a_k-2a_0)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]}$$

стремится к ξ_k-a_0 и точно так же y_k стремится к η_k-b_0.

Для всех остальных членов суммы (2) $|t-2k|>1$ и, следовательно, при достаточно большом n их знаменатели безгранично возрастают и сумма их стремится к нулю.

Для $t=2k+1$, что соответствует вершине M_{k+1} для прямой (1), мы получим

$$x_k=\frac{a_{k+1}-a_0}{2}$$

и следующий член суммы

$$x_{k+1}=\frac{(a_{k+2}+a_{k+1}-2a_0)+(a_{k+2}-a_{k+1})(t-2k-2)}{2[1+(t-2k-2)^n]}$$

при том же значении $t=2k+1$ даст

$$x_{k+1}=\frac{a_{k+1}-a_0}{2},$$

откуда $x_k+x_{k+1}=a_{k+1}-a_0$.

Что касается остальных членов суммы, то для всех них знаменатель бесконечно возрастает.

То же самое имеет место и для y_k+y_{k+1}.

При $t<-1$ или при $t>2m+1$ все члены суммы стремятся к нулю и, следовательно,

$$x-a_0\to 0; \quad y-b_0\to 0,$$

т. е. точка кривой остается поблизости от начальной вершины M_0.

Для упрощения вычислений будем в дальнейшем полагать, что M_0 находится в начале координат, что не отражается на общности результата. Уравнения (2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=\sum_{k=0}^{k=m-1}\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]},\\ y&=\sum_{k=0}^{k=m-1}\frac{(b_{k+1}+b_k)+(b_{k+1}-b_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]}.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

§ 2

Переходим к выяснению порядка приближения. Для этого рассматриваем значение $x-\xi_k$ и $y-\eta_k$ для одних и тех же значений t. Это дает нам отклонение точек N кривой от соответствующих точек M прямой.

Если отрезок NM образует с прямой M_kM_{k+1} угол, величина которого не стремится к нулю при возрастании n, то порядок величины NM будет совпадать с порядком отклонения точек кривой от стороны M_kM_{k+1}, если брать расстояние перпендикулярно к стороне.

Для полного исследования достаточно рассмотреть приближение на участке между серединой стороны M_kM_{k+1} и одной из вершин и, кроме того, отдельно приближение около вершины M_0.

1° При $t=2k$, т. е. в середине стороны M_kM_{k+1},

$$x_k=\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]}=\frac{a_{k+1}+a_k}{2}=\xi_k.$$

Остальные члены уравнения (3), например x_l, дадут

$$x_l=\frac{(a_{l+1}+a_l)+(a_{l+1}-a_l)(2k-2l)}{2[1+(2k-2l)^{2n}]}.$$

Полагая, что для координат всех точек многоугольника

$$|\xi|<A \quad \text{и} \quad |\eta|<B$$

и принимая во внимание, что $|2k-2l|\geqslant 2$, получим

$$|x_l|<\frac{A}{2^{2n}}; \quad |y_l|<\frac{B}{2^{2n}}$$

и следовательно,

$$|x-\xi_k|<\frac{mA}{2^{2n}}; \quad |y-\eta|<\frac{mB}{2^{2n}},$$

или иначе,

$$x=\xi_k+O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) \tag{4}$$

и, очевидно, также и для y.

2° При $t=2k+1-\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$, т. е. между серединой стороны и вершиной M_{k+1}, имеем:

$$x_k=\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(1-\varepsilon)}{2[1+(1-\varepsilon)^{2n}]}, \tag{5}$$

$$x_{k+1}=\frac{(a_{k+2}+a_{k+1})-(a_{k+2}-a_{k+1})(1+\varepsilon)}{2[1+(1+\varepsilon)^{2n}]}, \tag{6}$$

$$\xi_k=\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(1-\varepsilon)}{2}, \tag{7}$$

откуда

$$x_k-\xi_k=\frac{-2a_{k+1}+(a_{k+1}-a_k)\varepsilon}{2[1+(1-\varepsilon)^{-2n}]}, \tag{8}$$

$$x_{k+1}=\frac{2a_{k+1}-(a_{k+2}-a_{k+1})\varepsilon}{2[1+(1+\varepsilon)^{2n}]}. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что

$$\left.\begin{aligned}(1-\varepsilon)^{-2n}+\left[(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right]^{2n\varepsilon} > e^{2n\varepsilon},\\ (1+\varepsilon)^{2n}=\left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]^{2n\varepsilon} > 2^{2n\varepsilon},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

получим

$$|x_k-\xi_k|<\frac{A}{e^{2n\varepsilon}};\quad |x_{k+1}|<\frac{A}{2^{2n\varepsilon}}.$$

Остальные члены суммы для любого l дадут

$$x_l=\frac{(a_{l+1}+a_l)+(a_{l+1}-a_l)(2k+1-\varepsilon-2l)}{2[1+(2k+1-\varepsilon-2l)^{2n}]}$$

и так как $l\leqslant k-1$, либо $l\geqslant k+2$, получим в первом случае $2k+1-\varepsilon-2l>2$, и во втором $2k+1-\varepsilon-2l<-3$ и, следовательно,

$$|x_l|<\frac{A}{2^{2n}}.$$

Таким образом низший порядок имеет величина x_{k+1} и окончательно

$$x=\xi_k+O\left(\frac{1}{2^{2n\varepsilon}}\right) \tag{11}$$

и так же и для y.

Из (11) следует, что приближение ухудшается с уменьшением ε, т. е. для точек, лежащих ближе к вершине M_{k+1}.

3° При $t=2k+1$, т. е. для вершины M_{k+1}, имеем, как уже было показано выше,

$$x_k+x_{k+1}=a_k$$

и, кроме того,

$$x_l=\frac{(a_{l+1}+a_l)+(a_{l+1}-a_l)(2k+1-2l)}{2[1+(2k+1-2l)^{2n}]}$$

и при тех же условиях, как в 2°, $l\leqslant k-1$ или $l\geqslant k+2$,

$$|2k+1-2l|\geqslant 3,$$

откуда

$$|x_l|<\frac{A}{3^{2n}}$$

и следовательно,

$$x=\xi_k+O\left(\frac{1}{3^{2n}}\right) \tag{12}$$

и точно так же и для y.

Таким образом, около вершин многоугольника приближение получается наилучшим. Наибольшее отклонение получается где-то поблизости от вершины; к исследованию этого наихудшего случая мы сейчас и переходим. Для этого возвращаемся к

$$t = 2k + 1 - \varepsilon$$

и возьмем $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$, где α пока имеет произвольное значение. В этом случае для определения порядка знаменателей в формулах (8) и (9) воспользуемся приближенными выражениями для $(1-\varepsilon)^{-2n}$ и $(1+\varepsilon)^{2n}$ при малых ε. Из

$$\ln(1-\varepsilon)^{-2n} = -2n\ln(1-\varepsilon) = -2n\left[-\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} - \dots\right] = \\ = 2n\varepsilon + n\varepsilon^2 + \frac{2}{3}n\varepsilon^3 + \dots$$

получаем

$$(1-\varepsilon)^{-2n} = e^{2n\varepsilon}\cdot e^{n\varepsilon^2+\frac{2}{3}n\varepsilon^3+\dots} = e^{2n\varepsilon}\left[1 + n\varepsilon^2 + \frac{2}{3}n\varepsilon^3 + \dots\right]. \quad (13)$$

Аналогично

$$(1+\varepsilon)^{2n} = e^{2n\varepsilon}\left[1 - n\varepsilon^2 + \frac{2}{3}n\varepsilon^3 + \dots\right], \quad (14)$$

откуда при $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$

$$\left.\begin{aligned} (1-\varepsilon)^{-2n} &= e^{2\alpha}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^3}{n^2} + \dots\right], \\ (1+\varepsilon)^{2n} &= e^{2\alpha}\left[1 - \frac{\alpha^2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^3}{n^2} + \dots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Полагая α не зависящим от n и пренебрегая малыми величинами порядка выше $\frac{1}{n}$, получим из формул (8) и (9)

$$x_k + x_{k+1} - \xi_k = \frac{-2a_{k+1} + (a_{k+1} - a_k)\frac{\alpha}{n}}{2\left[1 + e^{2\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2}{n}\right)\right]} + \frac{2a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+1})\frac{\alpha}{n}}{2\left[1 + e^{2\alpha}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n}\right)\right]}$$

и после упрощения

$$\delta_x = x_k + x_{k+1} - \xi_k = \frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha})}{(1 + e^{2\alpha})^2}\right]. \quad (16)$$

Все остальные члены дадут, как мы уже видели, величины порядка $O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ и, следовательно, в данном случае

$$x = \xi_k + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (17)$$

При выводе формулы (16) мы пренебрегали величинами $\frac{\alpha^2}{n}$ и $\frac{\alpha^3}{n^2}$ по сравнению с единицей. Если бы α зависело от n и притом

имело порядок выше или равный $\sqrt{n}$, то такое упрощение было бы недопустимо.

Такое предположение соответствует случаю, когда $\varepsilon = \frac{\alpha}{n^{\lambda}}$, где α опять не зависит от n, а $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} (1-\varepsilon)^{-2n} &= \left[\left(1-\frac{\alpha}{n^{\lambda}}\right)^{-\frac{n^{\lambda}}{\alpha}}\right]^{2\alpha n^{1-\lambda}} = e^{2\alpha n^{1-\lambda}+\alpha^2 n^{1-2\lambda}+\cdots}, \\ (1+\varepsilon)^{2n} &= \left[\left(1+\frac{\alpha}{n^{\lambda}}\right)^{\frac{n^{\lambda}}{\alpha}}\right]^{2\alpha n^{1-\lambda}} = e^{2\alpha n^{1-\lambda}-\alpha^2 n^{1-2\lambda}+\cdots} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Сохраняя в показателях при e только первые два члена и пренебрегая остальными и введя для упрощения обозначения

$$\beta = 2\alpha n^{1-\lambda}; \qquad \gamma = \alpha^2 n^{1-2\lambda},$$

причем

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{2n^{\lambda}} < \frac{1}{2} \text{ при } n^{\lambda} > \alpha,$$

получим

$$\delta_x = x_k + x_{k+1} - \xi_k = \frac{-2a_{k+1} + (a_{k+1} - a_k)\frac{\alpha}{n^{\lambda}}}{2\left[1+e^{\beta+\gamma}\right]} + \frac{2a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+1})\frac{\alpha}{n^{\lambda}}}{2\left[1+e^{\beta-\gamma}\right]},$$

$$\delta_x = \frac{a_{k+1}e^{\beta}(e^{\gamma}-e^{-\gamma})}{1+e^{\beta}(e^{\gamma}+e^{-\gamma})+e^{2\beta}} +$$

$$+\frac{\alpha}{2n^{\lambda}}\left[\frac{(2a_{k+1}-a_k-a_{k+2})+(a_{k+1}-a_k)e^{\beta-\gamma}-(a_{k+2}-a_{k+1})e^{\beta+\gamma}}{1+e^{\beta}(e^{\gamma}+e^{-\gamma})+e^{2\beta}}\right].$$

Нетрудно видеть, что в выражении для δ_x первый член имеет более низкий порядок, чем второй. Таким образом, порядок приближения определяется этим первым членом:

$$\delta_x = O\left(\frac{1}{e^{\beta-\gamma}}\right) = O\left(\frac{1}{e^{\frac{\beta}{2}}}\right) \text{ при } \frac{\gamma}{\beta} < \frac{1}{2},$$

и следовательно,

$$x = \xi + O\left[\frac{1}{e^{n^{1-\lambda}}}\right]. \quad (19)$$

Порядок приближения при этом был бы очевидно выше, чем в рассмотренном ранее случае $\lambda = 1$.

Таким образом, если вообще $\varepsilon = \varphi(n)$, то в случае, если $\varphi(n)$ имеет порядок ниже, чем $\frac{1}{n}$, приближение получится лучше, чем при $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$; из формулы (16) очевидно, что то же имеет место, когда порядок $\varphi(n)$ выше, чем $\frac{1}{n}$, так как подставляя там $\alpha = \frac{\alpha_1}{n^{\lambda}}$, где $\lambda > 0$, порядок приближения станет равным $O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right)$.

Остается еще рассмотреть приближение к начальной вершине M_0. Первый член суммы (3), если M_0 взято в начале координат, имеет вид

$$x_0 = \frac{a_1 + a_1 t}{2[1+t^{2n}]} \text{ и, соответственно, } \xi_0 = \frac{a_1 + a_1 t}{2};$$

полагая $t = -1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, получим

$$x_0 - \xi = -\frac{a\varepsilon}{2[1+(1-\varepsilon)^{-2n}]} = O\left(\frac{1}{e^{2n\varepsilon}}\right); \tag{20}$$

все остальные члены суммы будут иметь порядок по крайней мере равный $O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$.

Точно так же, как и в выше рассмотренных случаях, наихудшее приближение получается при $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$, когда порядок становится равным $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

При $t = -1$ $x_0 - \xi = 0$ порядок приближения, зависящий от следующих членов уравнения, будет равен

$$O\left(\frac{1}{3^{2n}}\right).$$

Если давать значения $t < -1$ и рассматривать отклонения от начала координат, то из

$$x_0 = \frac{a_1(1+t)}{2[1+t^{2n}]},$$

очевидно, получим, что x_0 будет по модулю лишь вначале возрастать, а затем убывать, чем больше будет абсолютное значение t. Наихудшее приближение и здесь будет при $t = -1 - \frac{\alpha}{n}$, когда

$$x_0 = -\frac{a_1 \cdot \frac{\alpha}{n}}{2\left[1+\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{2n}\right]} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Совершенно то же самое получится, если взять $t = 2m + 1 \pm \varepsilon$, т. е. при подходе к началу координат после полного обхода многоугольника.

Резюмируя изложенное, получаем, что уравнения (2) или (3) дают приближение многоугольника, причем порядок приближения поблизости от вершин равен $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а повсюду в остальных точках выше.

§ 3

Рассмотрим теперь приближение касательной к кривой к направлению сторон многоугольника.

Из уравнения (3), дифференцируя по t, получим

$$x' = \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{a_{k+1} - a_k}{2\,[1 + (t - 2k)^{2n}]} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{[(a_{k+1} + a_k) + (a_{k+1} - a_k)\,(t - 2k)]\,2n\,(t - 2k)^{2n-1}}{2\,[1 + (t - 2k)^{2n}]^2}. \qquad (21)$$

Будем опять рассматривать приближение на участке между серединою стороны $M_k M_{k+1}$ и вершиной M_{k+1}. Положим

$$t = 2k + 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Выделим из суммы (21) члены, имеющие наибольшие значения:

$$x'_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{2\,[1 + (1 - \varepsilon)^{2n}]} -$$

$$- \frac{2n\,[(a_{k+1} + a_k)\,(1 - \varepsilon)^{2n-1} + (a_{k+1} - a_k)\,(1 - \varepsilon)^{2n}]}{2\,[1 + (1 - \varepsilon)^{2n}]^2}, \qquad (22)$$

$$x'_{k+1} = \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{2\,[1 + (1 - \varepsilon)^{2n}]} +$$

$$+ \frac{2n\,[(a_{k+2} + a_{k+1})\,(1 + \varepsilon)^{2n-1} - (a_{k+2} - a_{k+1})\,(1 + \varepsilon)^{2n}]}{2\,[1 + (1 + \varepsilon)^{2n}]^2}, \qquad (23)$$

$$x'_{k-1} = \frac{a_k - a_{k-1}}{2\,[1 + (3 - \varepsilon)^{2n}]} -$$

$$- \frac{2n\,[(a_k + a_{k-1})\,(3 - \varepsilon)^{2n-1} + (a_k - a_{k-1})\,(3 - \varepsilon)^{2n}]}{2\,[1 + (3 - \varepsilon)^{2n}]^2}. \qquad (24)$$

Что касается всех остальных членов суммы, то порядок их будет не ниже, чем $O\left(\frac{n}{3^{2n}}\right)$.

1° При $\varepsilon = 1$, т. е. для середины стороны $M_k M_{k+1}$, имеем

$$x'_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{2},$$

$$x'_{k+1} = O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right),$$

$$x'_{k-1} = O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right).$$

Аналогично получим и для y'. Таким образом для углового коэффициента касательной получим

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\frac{b_{k+1} - b_k}{2} + O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right)}{\frac{a_{k+1} - a_k}{2} + O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right)} = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} + O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right). \qquad (25)$$

Если $a_{k+1}-a_k=0$, то берем обратное отношение. Таким образом в середине отрезка касательная приближается к направлению стороны и порядок приближения равен $O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right)$.

2° $0<\varepsilon<1$. В этом случае, деля числитель и знаменатель второго члена x_k' на $(1-\varepsilon)^{2n-1}$, получим

$$x_k'=\frac{a_{k+1}-a_k}{2[1+(1-\varepsilon)^{2n}]}-\frac{2n[(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(1-\varepsilon)]}{2[1+(1-\varepsilon)^{2n}][1+(1-\varepsilon)^{-2n}](1-\varepsilon)} \tag{26}$$

и принимая во внимание, что $(1-\varepsilon)^{-2n}>e^{2n\varepsilon}$ и $(1-\varepsilon)^{2n}=$ $=\frac{1}{(1-\varepsilon)^{-2n}}<\frac{1}{e^{2n\varepsilon}}$,

можем написать:

$$x_k'=\frac{a_{k+1}-a_k}{2[1+(1-\varepsilon)^{2n}]}+O\left(\frac{n}{e^{2n\varepsilon}}\right). \tag{27}$$

Аналогично получаем

$$x_{k+1}'=\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{2[1+(1+\varepsilon)^{2n}]}+\frac{2n[(a_{k+2}+a_{k+1})-(a_{k+2}-a_{k+1})(1+\varepsilon)]}{2[1+(1+\varepsilon)^{2n}][1+(1+\varepsilon)^{-2n}](1+\varepsilon)}, \tag{28}$$

$$x_{k-1}'=\frac{a_k-a_{k-1}}{2[1+(3-\varepsilon)^{2n}]}-\frac{2n[(a_k+a_{k-1})+(a_k-a_{k-1})(3-\varepsilon)]}{2[1+(3-\varepsilon)^{2n}][1+(3-\varepsilon)^{-2n}](3-\varepsilon)}, \tag{29}$$

и пользуясь тем, что

$$(1+\varepsilon)^{2n}>2^{2n\varepsilon},\quad (3-\varepsilon)^{2n}>2^{2n},$$

$$(1+\varepsilon)^{-2n}<\frac{1}{2^{2n\varepsilon}},\quad (3-\varepsilon)^{-2n}<\frac{1}{2^{2n}},$$

можем написать:

$$x_{k+1}'=O\left(\frac{n}{2^{2n\varepsilon}}\right),$$

$$x_{k-1}'=O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right).$$

Таким образом, окончательно

$$x'=\frac{a_{k+1}-a_k}{2[1+(1-\varepsilon)^{2n}]}+O\left(\frac{n}{2^{2n\varepsilon}}\right) \tag{30}$$

и для углового коэффициента касательной получаем

$$\frac{y'}{x'}=\frac{b_{k+1}-b_k}{a_{k+1}-a_k}=O\left(\frac{n}{2^{2n\varepsilon}}\right). \tag{31}$$

Как и следовало ожидать, по мере приближения к вершине, т. е. при уменьшении ε, приближение ухудшается.

Определим еще направление касательной у самой вершины M_{k+1}, т. е. при $\varepsilon = 0$. Из (26), (27) и (28) получим:

$$x'_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{4} - \frac{n a_{k+1}}{4},$$

$$x'_{k+1} = \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{4} + \frac{n a_{k+1}}{4},$$

$$x'_{k-1} = O\left(\frac{n}{3^{2n}}\right).$$

Складывая эти выражения и принимая во внимание, что остальные члены x' будут величины еще меньшие, получим

$$x' = \frac{a_{k+2} - a_k}{4} + O\left(\frac{n}{3^{2n}}\right),$$

откуда

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b_{k+2} - b_k}{a_{k+2} - a_k} + O\left(\frac{n}{3^{2n}}\right). \tag{32}$$

Таким образом, около вершины M_{k+1} касательная к кривой имеет направление почти параллельное диагонали, соединяющей предыдущую и последующую вершины многоугольника.

§ 4

Не лишено интереса, помимо вопроса о приближении кривой к многоугольнику, несколько детальнее исследовать самую форму кривой, при достаточно большом n. Для этого рассмотрим направление отклонения NM точек кривой от соответствующих точек стороны многоугольника при одном и том же значении t.

Начнем исследование с той области кривой, где она наименее приближается к стороне многоугольника. Для главной части отклонения $x - \xi$ при $t = 2k + 1 - \varepsilon$ и $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$ мы имели (формула (16)):

$$x - \xi_k = \frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha})}{(1 + e^{2\alpha})^2}\right] \tag{16}$$

и аналогично

$$y - \eta_k = \frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4b_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2b_{k+1} - b_{k+2} - b_k)(1 + e^{2\alpha})}{(1 + e^{2\alpha})^2}\right], \tag{16'}$$

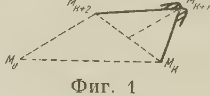
откуда

$$\frac{y - \eta_k}{x - \xi_k} = \frac{4b_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2b_{k+1} - b_{k+2} - b_k)(1 + e^{2\alpha})}{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha})}. \tag{33}$$

Пусть $\alpha \to 0$; тогда

$$\frac{y-\eta_k}{x-\xi_k} \to \frac{b_{k+1}-\frac{b_{k+2}+b_k}{2}}{a_{k+1}-\frac{a_{k+2}+a_k}{2}}. \tag{34}$$

Следовательно, поблизости от самой вершины M_{k+1} направление отклонения параллельно прямой, соединяющей вершину M_{k+1} с серединой диагонали M_kM_{k+2}. При этом, полагая $\alpha > 0$, из (16) и (16′) следует, что направление отклонения, считая от точки M на стороне многоугольника к точке N на кривой, имеет тот же знак, как направление отрезка от середины M_kM_{k+2} к вершине M_{k+1}, т. е. отклонение поблизости от вершины направлено в сторону самой вершины (фиг. 1).



Фиг. 1

При возрастании α, т. е. при отходе от вершины, направление отклонения непрерывно изменяется и при достаточно большом α получаем из (33) приближенно

$$\frac{y-\eta_k}{x-\xi_k} \approx \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \tag{35}$$

т. е. направление почти параллельно прямой, соединяющей вершину M_{k+1} с начальной вершиной M_0; при этом знак MN совпадает с знаком направления M_0M_{k+1}.

Рассмотрим, может ли кривая поблизости от вершины пересекать сторону многоугольника? Для такой возможности необходимо, либо чтобы $x-\xi_k$ и $y-\eta_k$ одновременно были равны нулю, либо чтобы направление отклонения MN совпало с направлением стороны M_kM_{k+1}.

В первом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} 4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha+(2a_{k+1}-a_{k+2}-a_k)(1+e^{2\alpha})=0, \\ 4b_{k+1}e^{2\alpha}\alpha+(2b_{k+1}-b_{k+2}-b_k)(1+e^{2\alpha})=0. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Отсюда следует, что для возможности такого случая необходимо, чтобы

$$\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}=\frac{b_{k+2}-b_k}{a_{k+2}-a_k}, \tag{37}$$

т. е. чтобы диагональ, соединяющая вершины M_{k+1} и M_0, была параллельна диагонали, соединяющей вершины M_{k+2} и M_k. Кроме того, имеем

$$\frac{\alpha e^{2\alpha}}{1+e^{2\alpha}}=\frac{a_{k+1}-\frac{a_{k+2}+a_k}{2}}{2a_{k+1}},$$

и так как $\alpha > 0$, то правая часть также положительна и, следовательно, при $a_{k+1} > 0$, $a_{k+1} > \frac{a_{k+2}+a_k}{2}$ и также, если $b_{k+1} > 0$,

то $b_{k+1} > \frac{b_{k+2} + b_k}{2}$. Таким образом, случай этот хотя и возможен, но лишь при особой форме многоугольника и притом не выпуклого, как это видно на фиг. 2.

Фиг. 2

Во втором случае, когда отклонение MN не обращается в нуль, но направление его совпадает с направлением стороны $M_k M_{k+1}$, получим

$$\frac{4b_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2b_{k+1} - b_{k+2} - b_k)(1 + e^{2\alpha})}{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k},$$

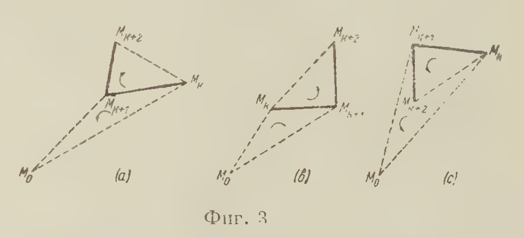
откуда

$$\frac{e^{2\alpha}\alpha}{1 + e^{2\alpha}} = -\frac{D_{k+1}}{4\Delta_k}, \tag{38}$$

где

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} a_k & b_k & 1 \\ a_{k+1} & b_{k+1} & 1 \\ a_{k+2} & b_{k+2} & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_k & b_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Отсюда следует, что уравнение (38) имеет для α вещественный положительный корень только при условии, если $\frac{D_{k+1}}{\Delta_k} < 0$, т. е. когда площадь треугольника $M_k M_{k+1} M_{k+2}$ имеет знак обратной площади треугольника $M_0 M_k M_{k+1}$, что возможно только, если многоугольник невыпуклый (фиг. 3). Из фиг. 3с следует, что обратное утверждение было бы неправильным, т. е. возможно, что $\frac{D_{k+1}}{D_k} > 0$ и тем не менее многоугольник оказывается невыпуклым.



Фиг. 3

Положим $\frac{D_{k+1}}{\Delta_k} = -c^2$, тогда из (38) получим

$$\alpha = (1 + e^{-2\alpha})\frac{c^2}{4}. \tag{40}$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$ уравнение (40) имеет наверно один и только один корень, так как левая часть возрастает, а правая убывает. Решая приближенно уравнение (40), получим

$$\alpha \approx 0.32\, c^2.$$

Переходим теперь к рассмотрению направления касательной к кривой поблизости от вершины. Из (16) имеем

$$x = \xi_k + \delta_x$$

и так как

$$\xi_k = \frac{(a_{k+1} + a_k) + (a_{k+1} - a_k)(1 - \varepsilon)}{2} = a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_k}{2} \cdot \frac{\alpha}{n},$$

получим

$$x = a_{k+1} + \frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha})}{(1 + e^{2\alpha})^2} - (a_{k+1} - a_k)\right], \quad (41)$$

откуда, дифференцируя по α, после упрощения получим

$$x' = \frac{1}{4n} \times$$

$$\left[\frac{-4a_{k+1}\alpha^2 \operatorname{sh}\alpha + (2a_{k+1} + a_{k+2} + a_k)\alpha \operatorname{ch}\alpha - (2a_{k+1}\operatorname{sh}\alpha + a_{k+2}e^{-\alpha} - a_k e^{\alpha})\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{ch}^3\alpha}\right] \quad (42)$$

и аналогичное выражение для y'.

Отсюда для углового коэффициента касательной имеем

$$\frac{y'}{x'} = \frac{4b_{k+1}\alpha^2\operatorname{sh}\alpha - (2b_{k+1} + b_{k+2} + b_k)\alpha\operatorname{ch}\alpha + (2b_{k+1}\operatorname{sh}\alpha + b_{k+2}e^{-\alpha} - b_k e^{\alpha})\operatorname{ch}^2\alpha}{4a_{k+1}\alpha^2\operatorname{sh}\alpha - (2a_{k+1} + a_{k+2} + a_k)\alpha\operatorname{ch}\alpha + (2a_{k+1}\operatorname{sh}\alpha + a_{k+2}e^{-\alpha} - b_k e^{\alpha})\operatorname{ch}^2\alpha}. \quad (43)$$

Приравнивая эту величину угловому коэффициенту стороны $M_k M_{k+1}$, а именно $\dfrac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k}$, получим те значения α, при которых касательная параллельна стороне многоугольника.

После упрощений получаем для α уравнение

$$\frac{8\Delta_k}{D_{k+1}}[\alpha^2 \operatorname{th}\alpha - \alpha] = 1 + e^{-2\alpha} - 2\alpha, \quad (44)$$

где Δ_k и D_{k+1} имеют значения, указанные в формулах (39).

Нетрудно показать, что уравнение (44) при $\dfrac{\Delta_k}{D_{k+1}} > 0$ имеет один и только один положительный вещественный корень, а при $\dfrac{\Delta_k}{D_{k+1}} < 0$ непременно два вещественных положительных корня. В самом деле, функция

$$y_1 = 1 + e^{-2\alpha} - 2\alpha$$

при $\alpha > 0$ монотонно убывает. При $\alpha = 0$ $y_1 = 2$. Приближенно можно найти $\alpha \approx 0.64$ для $y_1 = 0$.

С другой стороны,

$$y_2 = \alpha^2 \operatorname{th}\alpha - \alpha$$

имеет корень при $\alpha \approx 1.2$, причем для $0 < \alpha < 1.2$ $y_2 < 0$ и для $\alpha > 1.2$ $y_2 > 0$. В промежутке (0; 1.2) функция имеет один минимум. Из рассмотрения фиг. 4а очевидно, что уравнение (44) имеет один корень α и притом

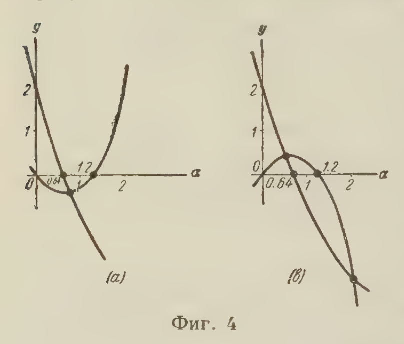
$$0.64 < \alpha_1 < 1.2$$

независимо от значений Δ_k и D_{k+1}.

При $\frac{\Delta_k}{D_{k+1}} < 0$ мы получаем случай, изображенный на фиг. 4а. Здесь, очевидно, имеется один корень

$$0 < \alpha_1 < 0.64.$$

Что же касается второго корня, то доказательство его существования основано на том, что функция y_1 имеет положительную вторую производную, в то время как функция $(-y_2)$—отрицательную, для любых положительных значений α. Таким образом, обе кривые обращены друг к другу своей вогнутостью и должны вторично пересечься.



Фиг. 4

Наконец, в случае $\Delta_k = 0$ получается один корень для $\alpha = 0.64$.

Итак, поблизости от вершины касательная параллельна стороне многоугольника либо только в одной точке, либо в двух. Последний случай имеет место, когда кривая пересекает сторону. При этом обе точки, в которых касательные параллельны стороне, лежат, как нетрудно показать, по разные стороны от точки пересечения кривой со стороной многоугольника.

Более полное представление о характере кривой около вершины можно получить, если определить точки пересечения произвольного луча, проходящего через вершину, с кривой.

Уравнение прямой через вершину M_{k+1} имеет вид:

$$y - b_{k+1} = k(x - a_{k+1}). \qquad (45)$$

Для кривой возьмем уравнение в форме (41) и воспользуемся аналогичным выражением для y. Из совместного решения этих уравнений с (45) получится уравнение для α:

$$\frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4b_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2b_{k+1} - b_{k+2} - b_k)(1 + e^{2\alpha}) - (b_{k+1} - b_k)(1 + e^{2\alpha})^2}{(1 + e^{2\alpha})^2}\right] =$$

$$= k\frac{\alpha}{2n}\left[\frac{4a_{k+1}e^{2\alpha}\alpha + (2a_{k+1} - a_{k+2} - a_k)(1 + e^{2\alpha}) - (a_{k+1} - a_k)(1 + e^{2\alpha})^2}{(1 + e^{2\alpha})^2}\right],$$

откуда имеем один корень $\alpha = 0$ и, кроме того, после преобразований и упрощений:

$$-\alpha = \frac{[(b_k - b_{k+1}) - k(a_k - a_{k+1})]e^{2\alpha}}{4(b_{k+1} - ka_{k+1})} +$$

$$+ \frac{[(b_{k+1} - b_{k+2}) - k(a_{k+1} - a_{k+2})e^{-2\alpha} + [(b_k - b_{k+2}) - k(a_k - a_{k+2})]}{4(b_{k+1} - ka_{k+1})}. \qquad (46)$$

Для дальнейшего упрощения исследования этого уравнения положим, что оси координат повернуты вокруг точки M_0 так, что точка M_{k+1} находится на оси X и притом ее абсцисса положительна. Значения координат теперь изменятся и мы будем их обозначать теми же буквами, но со штрихами. При этом $b'_{k+1}=0$. Таким образом, из (46) получим:

$$\alpha = \frac{[b'_k - k(a'_k - a'_{k+1})]\,e^{2\alpha}}{4ka'_{k+1}} +$$

$$+\frac{[-b'_{k+2} + k(a'_{k+2} - a'_{k+1})]\,e^{-2\alpha} + [(b'_k - b'_{k+2}) - k(a'_k - a'_{k+2})]}{4ka'_{k+1}}. \qquad (47)$$

Правую часть (47) можно всегда преобразовать к одному из двух видов:

$$\alpha = R_1 \operatorname{ch}(2\alpha + \beta_1) + \gamma \qquad (48)$$

или

$$\alpha = R_2 \operatorname{sh}(2\alpha + \beta_2) + \gamma, \qquad (49)$$

где в первом случае, когда коэффициенты при $e^{2\alpha}$ и $e^{-2\alpha}$ в уравнении (47) одинаковых знаков:

$$\left.\begin{aligned} R_1 \operatorname{ch}\beta_1 &= \frac{(b'_k - b'_{k+2}) - k(a'_k - a'_{k+2})}{4ka'_{k+1}}, \\ R_1 \operatorname{sh}\beta_1 &= \frac{(b'_k + b'_{k+2}) - k(a'_k - 2a'_{k+1} + a'_{k+2})}{4ka'_{k+1}}, \\ \gamma_1 &= R_1 \operatorname{ch}\beta_1, \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

и во втором, когда эти коэффициенты разных знаков:

$$\left.\begin{aligned} R_2 \operatorname{sh}\beta_2 &= \frac{(b'_k - b'_{k+2}) - k(a'_k - a'_{k+2})}{4ka'_{k+1}}, \\ R_2 \operatorname{ch}\beta_2 &= \frac{(b'_k + b'_{k+2}) - k(a'_k - 2a'_{k+1} + a'_{k+2})}{4ka'_{k+1}}, \\ \gamma_2 &= R_2 \operatorname{sh}\beta_2. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

В первом случае корни уравнения (48) графически могут быть получены как абсциссы точек пересечения прямой с цепной линией $y = R_1 \operatorname{ch}(2\alpha + \beta_1) + \gamma_1$. Таких точек пересечения может быть две или ни одной. Для этого случая мы имеем

$$\frac{b'_k - k(a'_k - a'_{k+1})}{b'_{k+2} - k(a'_{k+2} - a'_{k+1})} < 0.$$

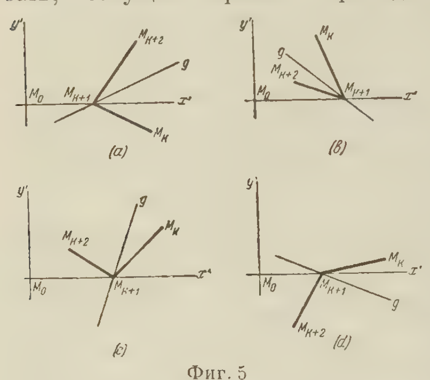
Отсюда в свою очередь следует, что если разности $a'_k - a'_{k+1}$ и $a'_{k+2} - a'_{k+1}$ обе одного знака, то

$$\frac{b'_k}{a'_k - a'_{k+1}} \lessgtr k \lessgtr \frac{b'_{k+2}}{a'_{k+2} - a'_{k+1}},$$

и если они разных знаков, то k одновременно больше или меньше обоих угловых коэффициентов

$$\frac{b'_k}{a'_k - a'_{k+1}} \quad \text{и} \quad \frac{b'_{k+2}}{a'_{k+2} - a'_{k+1}}.$$

Во всех этих случаях (см. фиг. 5a, b, c, d), как нетрудно показать, секущая прямая проходит внутри угла $M_k M_{k+1} M_{k+2}$ и только при таком условии возможно, что прямая пересечет кривую в двух точках, причем для обеих точек пересечения α одного знака, т. е. пересечение происходит внутри такого отрезка кривой, который целиком приближается к одной из двух сторон угла.



Фиг. 5

В частности, рассмотрим случай, когда секущая совпадает с диагональю $M_{k+1} M_0$, т. е., при избранной нами системе координат, совпадает с осью X. В этом случае $k = 0$ и уравнение (47) дает

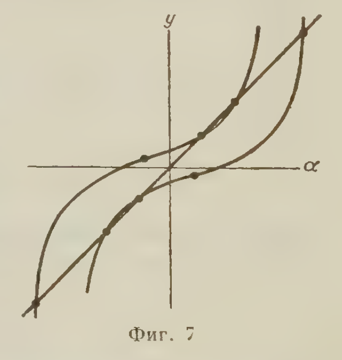
$$(b'_k - b'_{k+2})(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}) + (b'_k - b'_{k+2}) = 0,$$

т. е. вещественных точек пересечения кривой с прямой (кроме точки $\alpha = 0$) в этом случае нет. Отсюда вытекает следствие, что кривая не имеет около вершины двойных точек. В самом деле, в случае, если бы входящие внутрь угла ветви могли там пересекаться (фиг. 6), секущая прямая могла бы пересекать кривую в четырех точках и внутри угла не было бы ни одной такой секущей, которая не пересекала бы кривую ни в одной точке, кроме вершины.



Фиг. 6

Рассматривая случай (49), нетрудно показать, что ему соответствует секущая прямая, проходящая через вершину угла вне угла. Только в этом случае возможны три точки пересечения и наверно есть одна. При этом в случае трех точек пересечения $R_2 > 0$ и, следовательно, если $R_2 \operatorname{sh} \beta_2 > 0$, то $\beta_2 > 0$ и одновременно $\gamma_2 > 0$, и если $\beta_2 < 0$, то и $\gamma_2 < 0$. Таким образом, центр симметрии кривой находится во втором или четвертом квадрантах, и получается один из двух случаев, изображенных на фиг. 7. Очевидно, что из трех значений α, соответствующих точкам пересечения, два имеют один знак и третье знак противоположный, т. е. точки пересечения секущей прямой с кривой расположены так,



Фиг. 7

что по одну сторону вершины находятся две точки и по другую одна.

Рассмотрим еще частный случай расположения нашей секущей, когда она параллельна диагонали $M_k M_{k+2}$, т. е. касательна к кривой в вершине. В этом случае

$$k = \frac{b'_k - b'_{k+2}}{a'_k - a'_{k+2}}.$$

Тогда из (47) следует

$$\operatorname{sh} 2\alpha = \frac{2a'_{k+1}(b'_k - b'_{k+2})}{a'_{k+1}(b'_k - b'_{k+2}) + a'_k b'_{k+2} - b'_k a'_{k+2}} \cdot \alpha. \tag{52}$$

Если коэффициент при α больше 2, то касательная должна пересекать кривую в двух точках, расположенных по разные стороны от точки касания. Из

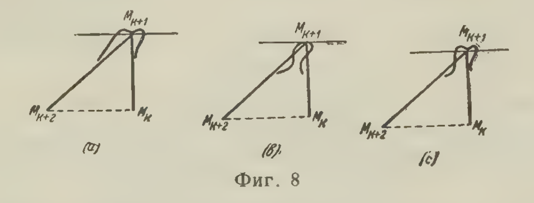
$$\frac{2a'_{k+1}(b'_k - b'_{k+2})}{a'_{k+1}(b'_k - b'_{k+2}) + a'_k b'_{k+2} - b'_k a'_{k+2}} > 2$$

следует

$$\frac{\begin{vmatrix} a'_k & b'_k \\ a'_{k+2} & b'_{k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a'_k & b'_k & 1 \\ a'_{k+1} & 0 & 1 \\ a'_{k+2} & b'_{k+2} & 1 \end{vmatrix}} > 0,$$

т. е. площади треугольников $M_0 M_k M_{k+1}$ и $M_k M_{k+1} M_{k+2}$ должны быть одного знака. Отсюда следует на основании соображений, вытекающих из (38), что кривая либо по обе стороны, либо хотя бы по одну сторону вершины наверно не пересекает сторону угла.

Из всего сказанного выше заключаем, что поблизости от вершины кривая имеет вид, изображенный на фиг. 8a, b, c, и наверно не имеет узловых точек.



Фиг. 8

Приближение кривой к вершине M_0, как уже выше было указано, имеет характер, отличающийся от приближения к другим вершинам. Исследуем более точно характер кривой около этой вершины. Как уже было показано выше, наихудшее приближение к стороне $M_0 M_1$ около вершины M_0 получится при $t = -1 \pm \varepsilon$ и при $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$. Из

$$x_0 = \frac{a_1(1+t)}{2[1+t^{2n}]} \quad \text{и} \quad \xi_0 = \frac{a_1(1+t)}{2}$$

при $t = -1 + \frac{\alpha}{n}$ получим

$$x_0 - \xi_0 = -\frac{\alpha}{2n} \cdot \frac{a_1}{1 + e^{2\alpha}},$$

и аналогично

$$y_0 - \eta_0 = -\frac{\alpha}{2n} \frac{b_1}{1 + e^{2\alpha}}, \tag{53}$$

откуда

$$\frac{y_0 - \eta_0}{x_0 - \xi_0} = \frac{b_1}{a_1}, \tag{54}$$

т. е. главная часть отклонения направлена вдоль самой стороны M_0M_1. При этом сами величины x_0 и y_0 будут одного знака с a_1 и b_1, т. е. при приближении значения t к -1 точки кривой будут приближаться к началу координат почти вдоль прямой M_0M_1. Если взять $t < -1$, то знаки x_0 и y_0 будут обратны a_1 и b_1, т. е. кривая как бы пойдет вдоль продолжения стороны M_0M_1 в противоположную сторону. При $t = -1 - \frac{\alpha}{n}$

$$x_0 = -\frac{\alpha}{2n} \cdot \frac{a_1}{1 + e^{2\alpha}}, \tag{55}$$

откуда, для определения максимального отклонения, из

$$x' = -\frac{a_1}{2n} \cdot \frac{1}{1 + e^{2\alpha}} \left[1 - \alpha \frac{2e^{2\alpha}}{1 + e^{2\alpha}}\right] = 0$$

получим

$$\alpha = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\alpha}] \approx 0.64;$$

следовательно, наибольшая по модулю отрицательная величина x_0 равна

$$x_0 \approx -\frac{0.07}{n} a_1.$$

Таким образом, кривая заходит за точку M_0 в сторону, противоположную направлению отрезка M_0M_1, приблизительно на $\frac{0.07}{n}$ от длины отрезка M_0M_1.

Для определения отклонения кривой около вершины от направления M_0M_1 приходится обратиться к рассмотрению следующего члена в уравнении кривой. Его значение равно

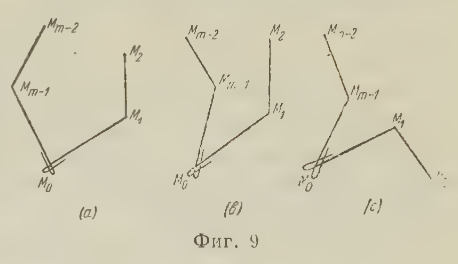
$$x_1 = \frac{(a_2 + a_1) + (a_2 - a_1)(t - 2)}{2[1 + (t - 2)^{2n}]};$$

откуда, подставляя $t = -1 + \varepsilon$, получим

$$x_1 \approx \frac{2a_1 - a_2}{3^{2n}}; \quad y_1 \approx \frac{2b_1 - b_2}{3^{2n}},$$

т. е. отклонение имеет направление, параллельное отрезку, соединяющему середину C диагонали M_0M_2 с вершиной M_1 и притом в сторону от C к M_1. При малых значениях ε между $-\frac{\alpha}{n} < \varepsilon <$

$< \frac{\alpha}{n}$ величина отклонения мало меняется, однако же постепенно уменьшаясь с увеличением ε. Так как при подходе к вершине M_0 от точки M_{m-1} кривая имеет такой же характер, то две эти петли кривой должны пересекаться, как показано на фиг. 9a, b, c. Смотря по виду углов при M_1 и M_{m-1}, кривая имеет от одной до трех узловых точек, не считая вершины M_0.



Фиг. 9

§ 5

Выше было установлено условие, при котором кривая пересекает сторону угла около вершины и, следовательно, входит внутрь угла. Если около следующей вершины кривая не пересекает стороны, а согласно доказанному обходит вершину всегда снаружи, то кривая должна пересечь сторону по крайней мере еще один раз между двумя вершинами, прилежащими к одной стороне.

Рассмотрим этот случай пересечения. Положим $t = 2k + 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда согласно (8) и (9) проекция на ось X главной части отклонения кривой от стороны будет состоять из суммы $x_k - \xi_k$ и x_{k+1}, где

$$x_k - \xi_k = \frac{-2a_{k+1} + (a_{k+1} - a_k)\varepsilon}{2[1 + (1-\varepsilon)^{2n}]},$$

$$x_{k+1} = \frac{2a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+1})\varepsilon}{2[1 + (1+\varepsilon)^{2n}]}.$$

Из этих двух величин первая также имеет более высокий порядок, так как отношение

$$\left|\frac{x_k - \xi_k}{x_{k+1}}\right| = M\frac{(1+\varepsilon)^{2n}}{(1-\varepsilon)^{-2n}} = M(1-\varepsilon^2)^{2n},$$

где M — некоторое конечное положительное число, при $\varepsilon > 0$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, в качестве главной части проекции отклонения можно взять x_{k+1} и, соответственно, y_{k+1}. Если направление отклонения совпадет с направлением стороны $M_k M_{k+1}$, то кривая пересечет эту сторону. Возьмем

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{2b_{k+1} - (b_{k+2} - b_{k+1})\varepsilon}{2a_{k+1} - (a_{k+2} - a_{k+1})\varepsilon} = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k},$$

откуда

$$\varepsilon = -\frac{2\Delta_k}{D_{k+1}} \tag{56}$$

и так как по предположению $0 < \varepsilon < 1$, то пересечение возможно при соблюдении двух условий:

$$\frac{\Delta_k}{D_{k-1}} < 0 \qquad 2\,|\,\Delta_k\,| < |\,D_{k+1}\,|. \tag{57}$$

Так как при выполнении первого условия кривая пересекает сторону около вершины, то при том же условии она может вторично пересечь сторону между вершиной и серединой стороны. Однако пересечение это не обязательно, так как для него требуется соблюдение и второго условия.

Остается еще рассмотреть условие пересечения около самой середины стороны, когда $\varepsilon \approx 1$. Возьмем $\varepsilon = 1 - \frac{\alpha}{n}$. В этом случае получим:

$$x_k - \xi = - \frac{(a_{k+1} + a_k) + (a_{k+1} - a_k)\frac{\alpha}{n}}{2\left[1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{-2n}\right]} = O\left(\frac{1}{n^{2n}}\right), \tag{58}$$

$$x_{k-1} = \frac{(3a_k - a_{k-1}) + (a_k - a_{k-1})\frac{\alpha}{n}}{2\left[1 + \left(2 + \frac{\alpha}{n}\right)^{2n}\right]}, \tag{59}$$

$$x_{k+1} = \frac{(3a_{k+1} - a_{k+2}) + (a_{k+2} - a_{k+1})\frac{\alpha}{n}}{2\left[1 + \left(2 - \frac{\alpha}{n}\right)^{2n}\right]}. \tag{60}$$

Очевидно, что (58) будет малой величиной высшего порядка и в качестве главной части отклонения можно взять $x_{k-1} + x_{k+1}$. После преобразования и упрощения получим

$$x_{k-1} + x_{k+1} \approx \frac{(3a_k - a_{k-1})\,e^{-\alpha} + (3a_{k+1} - a_{k+2})\,e^{\alpha}}{2^{2n+1}} \tag{61}$$

и, аналогично,

$$y_{k-1} + y_{k+1} \approx \frac{(3b_k - b_{k-1})\,e^{-\alpha} + (3b_{k+1} - b_{k+2})\,e^{\alpha}}{2^{2n+1}}, \tag{62}$$

откуда, приравнивая

$$\frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{x_{k-1} + x_{k+1}} = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k},$$

получаем

$$e^{2\alpha} = - \frac{2\Delta_k + D_k}{2\Delta_k + D_{k+1}}, \tag{63}$$

где

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{k-1} & b_{k-1} & 1 \\ a_k & b_k & 1 \\ a_{k+1} & b_{k+1} & 1 \end{vmatrix}; \quad D_{k+1} = \begin{vmatrix} a_k & b_k & 1 \\ a_{k+1} & b_{k+1} & 1 \\ a_{k+2} & b_{k+2} & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_k & b_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Пересечение имеет место, если

$$\frac{2\Delta_k + D_k}{2\Delta_k + D_{k+1}} < 0,$$

или

$$\frac{1+\frac{D_k}{2\Delta_k}}{1+\frac{D_{k+1}}{2\Delta_k}}<0. \qquad (64)$$

Пусть

$$1+\frac{D_{k+1}}{2\Delta_k}<0, \quad 1+\frac{D_k}{2\Delta_k}>0.$$

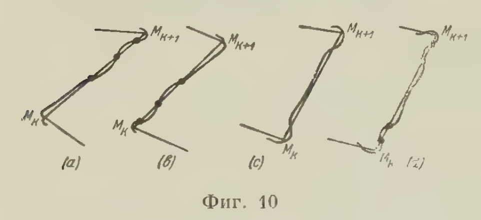
Первое неравенство равносильно

$$-1<\frac{2\Delta_k}{D_{k+1}}<0,$$

т. е. соответствует случаю, когда кривая пересекает сторону M_kM_{k+1}, около вершины M_{k+1} и, кроме того, при $\varepsilon=-\frac{2\Delta_k}{D_{k+1}}$, т. е. между вершиной M_{k+1} и серединой M_kM_{k+1}. Второе неравенство показывает, что пересечения между вершиной M_k и серединой M_kM_{k+1} в этом случае не будет. Кривая пересечет сторону в трех точках. Если, наоборот,

$$1+\frac{D_{k+1}}{2\Delta_k}>0 \text{ и } 1+\frac{D_k}{2\Delta_k}<0,$$

то, кроме пересечения в середине, будут две точки пересечения: одна между серединой и вершиной M_k и вторая около вершины M_k. Если



Фиг. 10

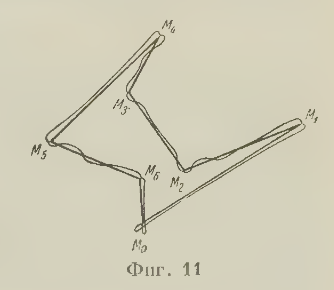
$$1+\frac{D_{k+1}}{2\Delta_k}>0 \text{ и } 1+\frac{D_k}{2\Delta_k}>0,$$

то кривая пересекает сторону M_kM_{k+1} либо только около вершин, и притом около одной или обеих, либо не пересекает сторону ни разу. И наконец, если

$$1+\frac{D_{k+1}}{2\Delta_k}<0 \text{ и } 1+\frac{D_k}{2\Delta_k}<0,$$

то кривая пересекает сторону M_kM_{k+1} четыре раза, около обеих вершин и по обе стороны от середины стороны. Четыре таких случая показаны на фиг. 10 a, b, c, d.

Пользуясь всеми этими выводами, можно без вычислений определить характер кривой, приближающей данный многоугольник при достаточно большом n.



Фиг. 11

На фиг. 11 дан пример приближения к семиугольнику, причем все отклонения, конечно, во много раз преувеличены.

§ 6

Предложенный способ приближения многоугольника допускает различного рода обобщения. Так, например, можно тем же способом получить приближение незамкнутой ломаной. Для этого нужно представить эту ломаную как замкнутый многоугольник, т. е. обойти ее дважды, сначала в одном направлении, а потом в обратном. Нетрудно показать, что при обратном обходе приближающая кривая также сольется с кривой, соответствующей обходу в прямом направлении.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно написать уравнение кривой в виде

$$x=\sum_{k=0}^{k=m-1}\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2\left[1+(t-2k)^{2n}\right]}+$$
$$+\sum_{l=m-1}^{l=0}\frac{(a_l+a_{l+1})+(a_l-a_{l+1})(t-4m+2+2l)}{2\left[1+(t-4m+2+2l)^{2n}\right]}$$

и аналогично для y, причем члены первой суммы приближаются к сторонам $M_0M_1\ldots M_m$ ломаной, когда t пробегает значения $-1\leqslant t\leqslant 2m-1$, а члены второй суммы приближаются к той же ломаной, но взятой в обратном порядке $M_mM_{m-1}\ldots M_1M_0$, когда t пробегает значения $2m-1\leqslant t\leqslant 4m-1$.

Если во второй сумме изменить порядок членов и ввести обозначение k вместо l, то можно написать:

$$x=\sum_{k=0}^{k=m-1}\left[\frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2\left[1+(t-2k)^{2n}\right]}+\right.$$
$$\left.+\frac{(a_{k+1}+a_k)-(a_{k+1}-a_k)(t-4m+2+2k)}{2\left[1+(t-4m+2+2k)^{2n}\right]}\right]. \qquad (65)$$

Нетрудно видеть, что при всех значениях k сумма двух членов, стоящих в скобках, будет одна и та же при двух различных значениях t, а именно

$$t_1 \text{ и } t_2=4m-2-t_1,$$

что как раз и соответствует прохождению вдоль кривой в прямом и обратном направлениях.

Пользуясь известной теоремой Эйлера, что всякий связный конечный линейный комплекс (граф) может быть покрыт непрерывным путем и притом так, что каждый симплекс его будет пройден два и только два раза, можно составить по предложенному выше методу уравнение уникурсальной кривой, приближающей произвольный связный конечный граф, составленный из прямоли-

нейных отрезков. При этом, однако, при двукратном прохождении вдоль одного из отрезков в общем случае ветви кривой не будут в точности сливаться друг с другом.

В качестве дальнейшего обобщения можно еще указать на то, что присоединяя к уравнениям для x и y еще аналогичное уравнение для z, можно получить приближение пространственного многоугольника или, идя дальше, связного пространственного линейного комплекса, состоящего из прямолинейных отрезков.

Научно-исслед. институт математики и механики
при Ленингр. гос. университете.

M. FRANK. ÜBER DIE ANNÄHERUNG BELIEBIGER POLYGONE MITTELS UNICURSALKURVEN

ZUSAMMENFASSUNG

Gegeben sei ein Vieleck $M_0M_1 \ldots M_{m-1}M_0$ mit den Koordinaten der Ecken (a_0, b_0), $(a_1, b_1), \ldots, (a_{m-1}, b_{m-1})$, (a_0, b_0). Die Gleichung jeder Seite M_kM_{k+1} kann in der Form

$$\xi_k = \frac{(a_{k+1}+a_k)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2},$$

$$\eta_k = \frac{(b_{k+1}+b_k)+(b_{k+1}-b_k)(t-2k)}{2}$$

dargestellt werden. Die Kurve

$$x = \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(a_{k+1}+a_k-2a_0)+(a_{k+1}-a_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]} + a_0,$$

$$y = \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(b_{k+1}+b_k-2b_0)+(b_{k+1}-b_k)(t-2k)}{2[1+(t-2k)^{2n}]} + b_0$$

nähert sich bei genügend hohem n dem Vieleck, falls $a_m = a_0$ und $b_m = b_0$ angenommen werden. Dabei durchläuft die Kurve in der Nähe der Strecke M_kM_{k+1} wenn der Parameter t

$$2k-1 \leqslant t \leqslant 2k+1.$$

Der Einfachheit wegen wird $a_0 = b_0 = 0$ angenommen, wodurch die Allgemeinheit der Überlegungen nicht beschränkt wird.

Die Güte der Annäherung wird durch Abschätzen der Grössen $\delta_x = |x - \xi_k|$ und $\delta_y = |y - \eta_k|$ bestimmt.

Es zeigt sich (4), dass in der Mitte der Strecke M_kM_{k+1} die Grössen δ_x und δ_y von der Grössenordnung $O\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$ sind. Zwischen der Mitte und der Ecke [siehe (5)—(11)] hat die Annäherung die Grössenordnung $O\left(\frac{1}{2^{2n\varepsilon}}\right)$ wo ε sich beim Übergang von der Mitte zur Ecke von 1 auf 0 abnimmt und damit die Annäherung immer schlechter wird. An der Ecke M_{k+1} selbst sind die Grössenordnungen

von δ_x und δ_y gleich $O\left(\frac{1}{3^{2n}}\right)$ [siehe (12)]. Es wird gezeigt (16), dass der schlimmste Fall dann eintritt, wenn $\varepsilon = \frac{\alpha}{n}$, wo α eine Konstante ist. Dabei sind die Grössenordnungen von δ_x und δ_y gleich $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Durch Berechnung der Richtungskoeffizienten der Tangente an die Kurve [(21), (25), (31), (32)] wird gezeigt, dass sich die Richtung der Tangente der Richtung der Seite überall nähert ausser in kleinen Bereichen an den Ecken. Die Annäherung ist in der Mitte der Strecke $M_k M_{k+1}$ von der Grössenordnung $O\left(\frac{n}{2^{2n}}\right)$, zwischen der Mitte und der Ecke von der Grössenordnung $O\left(\frac{n}{2^{2n\varepsilon}}\right)$. An der Ecke selbst nähert sich die Richtung der Tangente der Richtung der Diagonale $M_k M_{k+2}$ (32). Eine genauere Untersuchung der Kurve zeigt, dass falls wir nur den Hauptteil der Grössen δ_x und δ_y beachten, die Kurve die Ecken des Vielecks «aussen» umläuft, wenn man als Innenseite der Ecke diejenige Seite bezeichnet, wo der Winkel kleiner als π ist. Dabei wird bewiesen, dass die Kurve die Seite $M_k M_{k+1}$ in der Nähe der Ecke M_{k+1} dann und nur dann schneidet, wenn

$$\frac{D_{k+1}}{\Delta_k} < 0 \text{ ist,}$$

wo

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} a_k & b_k & 1 \\ a_{k+1} & b_{k+1} & 1 \\ a_{k+2} & b_{k+2} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_k & b_k \\ a_{k+1} & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Weiter wird gezeigt, dass jede Gerade, die durch die Ecke M_{k+1} geht, die Kurve an der Ecke selbst und ausserdem noch höchstens in zwei Punkten in der Nähe der Ecke schneidet, falls die Gerade durch die Innenseite des Winkels geht, und höchstens in drei Punkten, falls sie ausserhalb des Winkels liegt. Dadurch wird bewiesen, dass in der Nähe der Ecken die Kurve keine Doppelpunkte haben kann. Die verschiedenen Formen der Kurve an den Ecken werden in Fig. 8 gezeigt. An der Ecke M_0 hat die Kurve eine andere Gestalt. Sie hat 1 bis 3 Doppelpunkte (Fig. 9 a, b, c).

Die Kurve kann die Seiten des Vielecks noch in anderen Punkten schneiden und zwar in der Nähe der Mitte, oder zwischen der Mitte und der Ecke. Es wird bewiesen [(56) — (64)], dass die Höchstzahl der Schnittpunkte nicht grösser als 4 sein kann.

Zum Schluss wird gezeigt, dass dieselbe Methode auch zur Annäherung eines nichtgeschlossenen Polygonalzuges dienen kann oder sogar eines beliebigen endlichen zusammenhängenden Graphes, der aus geraden Strecken besteht. Dabei müssen aber an jeder Strecke zwei Kurvenzüge liegen, die sich der Strecke nähern.

ЗАСЕДАНИЯ ГРУППЫ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

27 декабря 1937 г.

27 декабря 1937 г. происходили заседания Группы математики, на которых обсуждались следующие вопросы: 1) о работе Механико-математического факультета Ленинградского государственного университета, 2) об издании математической литературы, 3) о состоянии журнала «Математический сборник». Ниже печатаются резолюции, принятые Группой по этим вопросам.

Кроме того, был заслушан отчет о работе Группы в 1937 г. и утвержден план работы Группы на 1938 г. Планом предусматривается проведение циклов заседаний Группы, посвященных теории вероятностей, теории функций и теории дифференциальных уравнений, а также вопросам преподавания математики и рассмотрению планов научных работ математических институтов.

РЕЗОЛЮЦИЯ

по докладу декана Механико-математического факультета Ленинградского государственного университета проф. М. Ф. Субботина о работе факультета

Заслушав доклад декана Механико-математического факультета Ленинградского государственного университета проф. М. Ф. Субботина, Группа математики Академии Наук СССР отмечает, что Механико-математический факультет Ленинградского государственного университета является одним из крупнейших центров подготовки квалифицированных специалистов в области математики, механики и астрономии и имеет всесоюзное значение.

В работе факультета необходимо отметить следующие положительные моменты:

1) преподавание проводится на достаточно высоком научном уровне, в частности имеется большое количество интересных и важных факультативных курсов;

2) наличие в системе факультета научно-исследовательских институтов дает возможность установить тесный контакт между научной работой и преподаванием, в частности вовлекать студентов в работу научных семинаров уже с младших курсов;

3) увеличение за последний год приема на факультет дает возможность в большей, хотя еще и не в полной мере, использовать имеющиеся квалифицированные силы;

4) факультету принадлежит инициатива в организации математических олимпиад, получивших за последние годы широкое распространение в практике других университетов.

Наряду с этим необходимо отметить следующие обстоятельства, отрицательно влияющие на работу факультета:

1) имеет место недостаточная стабильность учебного плана, вызываемая в первую очередь колебаниями в целевых установках факультета;

2) прием на факультет происходит практически без конкурса, так как в связи с недостаточным количеством мест в общежитии факультет может принимать лишь жителей Ленинграда; это тем более недопустимо, что, как уже было отмечено, факультет имеет всесоюзное значение;

3) отсутствие достаточного количества учебных помещений не дает возможности надлежащим образом развернуть работу.

Для дальнейшего улучшения работы факультета Группа считает необходимым:

1. Окончательно определить целевую установку факультета. Считая при этом совершенно правильным направление значительной части оканчивающих на работу в среднюю школу, необходимо также учитывать важность подготовки факультетом научных кадров и то особое значение, которое в этом деле имеет Ленинградский, так же как и Московский, университет.

2. При использовании оканчивающих факультет на педагогической работе в средней школе следует направлять их преимущественно в крупные центры, этим самым предоставляя последним высококвалифицированные педагогические кадры и позволяя одновременно окончившим факультет продолжать научный рост путем поддержания связи с научными центрами.

3. Прием организовать таким образом, чтобы в нем могли участвовать не только ленинградцы, но и жители всего Советского Союза, для чего в первую очередь необходимо обеспечить иногородних общежитиями, а также шире освещать деятельность факультета в прессе.

4. Принимая во внимание, что отличники учебы, поступающие в университет без испытаний, во многих случаях оказываются математически недостаточно подготовленными и потому отстают от принятых по конкурсу, считать необходимым поставить перед Всесоюзным комитетом по делам высшей школы и перед Наркомпросом вопрос об изучении этого явления.

РЕЗОЛЮЦИЯ

по вопросу об издании математической литературы

Заслушав доклады представителей Учпедгиза и Технико-теоретической редакции ОНТИ, Группа математики констатирует:

1. Существующее ныне распределение изданий математической литературы между разными издательствами не обосновано ни различием тематики, ни различием авторских и редакционных кадров. Между тем это распыление изданий математической литературы приводит к тому, что качество оформления математической литературы стоит на низком уровне, причем не создается ни специализированная производственная база для набора математической литературы, ни производственные кадры (наборщики по математическому набору, корректоры и т. д.).

2. Положение с изданием учебной литературы является совершенно неудовлетворительным. Стабильные учебники (по геометрии, арифметике) и задачники (особенно по арифметике—Поповой и Березанской) совершенно неудовлетворительны и нуждаются в срочной замене (об этом подробно было сказано в резолюции Группы математики от 21 декабря 1936 г.). В настоящее время учебники по арифметике, алгебре и геометрии заменяются переработанными старыми учебниками (Киселев). Эта переработка может быть рассматриваема лишь как временная мера, отнюдь не разрешающая полностью проблемы учебников.

Что же касается арифметических задачников, то здесь положение остается в основном прежним.

Методические пособия, например Березанской, отражают осужденные математической общественностью старые установки Наркомпроса.

Литература для учителей почти отсутствует. Журнал для учительства «Математика в средней школе» издается на чрезвычайно низком уровне как научном, так и педагогическом, и не обладает квалифицированной редакцией.

3. Положение с изданием научно-популярной литературы не является нормальным. Издание этой литературы распылено между четырьмя издательствами (Учпедгиз, Технико-теоретическая редакция ОНТИ, Юношеская редакция ОНТИ и Издательство Академии Наук). При этом Редакция юношеской и популярной литературы оказалась совершенно беспомощной в деле издания математической литературы.

Отсутствует элементарно-научный математический журнал. Ненормальность этого положения особенно ясна, если вспомнить, что даже в дореволюционной России существовало два таких журнала. Между тем спрос на такой журнал вырос во много раз. Сборник «Математическое просвещение» выходит крайне нерегулярно.

4. Технико-теоретической редакцией ОНТИ проделана за последние годы значительная работа по изданию научной литературы и литературы для вузов. Однако количество выпускаемых этой редакцией названий из года в год падает, причем падает также и процент новых изданий.

Совершенно ненормальным является то, что учебная литература для университетов и педвузов выпускается разными издательствами.

Группа считает ненормальным то, что «Успехи математических наук», спрос на которые выявился с полной определенностью, издаются в виде нерегулярно выходящего сборника.

В связи с отмеченным положением в деле издания математической литературы Группа считает необходимым проведение следующих мероприятий:

1. Совершенно необходимо организовать специализированное единое физико-математическое издательство.

2. По линии учебной литературы:

а) наладить выпуск ряда учебников, выходящих за пределы программы средней школы (для учительства);

б) пополнить имеющиеся учебники, в частности за счет перевода наиболее интересной иностранной учебной литературы;

в) подготовить создание новых математических учебников, стоящих высоко как с научной, так и с педагогической точки зрения, из которых потом, после проверки их на практике, можно выбрать основные учебники для средней школы;

г) обеспечить поднятие научной квалификации учительства путем регулярного выпуска специальных серий элементарно-научных книг;

д) возглавить журнал «Математика в средней школе» квалифицированной редакцией.

3. По линии научно-популярной литературы:

а) значительно увеличить выпуск этой литературы, сконцентрировав его в одном месте;

б) превратить сборник «Математическое просвещение» в регулярно выходящий элементарно-математический журнал.

4. По линии учебной литературы для вузов:

а) увеличить выпуск новой учебной литературы, особенно для втузов;

б) сосредоточить издание литературы для университетов и педвузов в одном месте;

в) превратить «Успехи математических наук» в регулярно выходящий журнал.

РЕЗОЛЮЦИЯ

по докладу о состоянии журнала «Математический сборник»

1. Заслушав доклады ответственного редактора журнала «Математический сборник» акад. О. Ю. Шмидта и ответственного секретаря проф. А. Ф. Берманта, Группа математики отмечает, что «Математический сборник» за последнее время стал крупнейшим математическим журналом в СССР и одним из лучших мировых математических журналов. Эта оценка журнала подтверждается следующими данными:

1) печатаемые в журнале статьи находятся на высоком научном уровне и отражают главнейшие достижения советской математики;

2) техническое оформление журнала значительно улучшилось за последнее время, особенно с момента перехода журнала в Академию Наук;

3) по своему объему журнал в 1937 г. вышел на первое место среди других международных математических журналов;

4) в журнале начали печататься во все увеличивающемся числе крупные иностранные ученые.

2. Группа математики отмечает, что высоким своим положением «Математический сборник» обязан работе ответственного редактора акад. О. Ю. Шмидта и ответственного секретаря проф. А. Ф. Берманта.

3. Для дальнейшего улучшения журнала Группа математики одобряет мероприятия, намеченные его редакцией, и в первую очередь считает необходимым:

1) просить Издательство Академии Наук обеспечить более четкую организацию издания (своевременный и регулярный выход в свет тиража и оттисков, своевременная оплата гонораров, представление гранок авторской корректуры на хорошей бумаге и с большими полями, выделение в типографии специальной бригады наборщиков по математическому набору);

2) усилить научные связи журнала с советскими и иностранными учеными, для чего увеличить обмен и бесплатную рассылку журнала, а также обсудить вопрос об издании специальных бюллетеней;

3) издать в 1938 г. указатели по «Математическому сборнику» по периодам (1892—1917 и 1918—1935).

Просить Президиум Академии Наук отпустить Издательству Академии Наук необходимые средства для проведения работы по составлению и напечатанию этих указателей.

Авторы статей этого выпуска и их адреса

Les auteurs des articles de ce fascicule et leurs adresses

Виноградов Иван Матвеевич, ул. Горького, 56, кв. 10, Москва.
I. Vinogradow, rue Gorkogo, 56, app. 10, Moscou.

Чудаков Николай Григорьевич, Земляной вал, д. 21/23, кв. 80, Москва.
N. Tchudakoff, Semlianoy Val, 21/23, app. 80, Moscou.

Линник Юрий Владимирович, Биржевая линия, д. 12, кв. 2, В. О., Ленинград (164).
U. Linnik, Birgevaya Liniya, 12, app. 2, V. O., Léningrad (164).

Шнирельман Лев Генрихович, Земляной вал, д. 21/23, кв. 99, Москва.
L. Schnirelmann, Semlianoy Val, 21/23, app. 99, Moscou.

Соболев Сергей Львович, Б. Полянка, д. 4/6, кв. 18, Москва.
S. Soboleff, Bolchaya Polianka, 4/6, app. 18, Moscou.

Райков Дмитрий Абрамович, Лубянский проезд, д. 25, кв. 4, Москва.
D. Raikov, Loubiansky proyesd, 25, app. 4, Moscou.

Келдыш Людмила Всеволодовна, Трудовая ул. д., 1, кв. 9, Горький.
L. Keldych, rue Troudovaya, 1, app. 9, Gorkiy.

Франк Михаил Людвигович, Индустриальный институт, профессорский дом, кв. 10, Ленинград (21).
M. Frank, Indoustrialniy institut, Proffessorskiy Dom, app. 10, Léningrad (21).

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР.

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 67; тел. В 3 47 38.

Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaya, 67, Moscou.

Ответственный редактор — академик-секретарь
Отделения математических и естественных наук
академик А. Е. Ферсман
Редакционная коллегия — Президиум Математической группы ОМЕН:
акад. И. М. Виноградов, акад. С. Н. Бернштейн
и проф. Б. И. Сегал

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1938